Доклады Академии Наук СССР
1954. Том XCIV, № 5

МАТЕМАТИКА

Г. Н. ПОВАРОВ

О ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ РАЗДЕЛИМОСТИ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком М. В. Келдышем 7 XII 1953)

1. Развитие теории релейных схем (¹) ставит задачу исследования систематики булевых функций.

Условия работы однотактных релейных схем выражаются булевыми функциями, аргументы которых изображают состояние приемных элементов (¹). Множество всех булевых функций n аргументов описывает все возможные условия работы схемы с n приемными элементами.

Однако условия работы, обычно встречающиеся на практике, как правило, принадлежат к некоторым особым множествам (классам) булевых функций. Благодаря этому для их схемной реализации требуется значительно меньше контактов, чем для реализации произвольных булевых функций, которые, вообще говоря, имеют весьма сложный вид.

Представляется важным выделить классы простых булевых функций и исследовать соотношения между такими классами.

К числу классов простых булевых функций принадлежит класс функционально разделимых функций, описанных К. Э. Шенноном (³). В настоящей работе предлагается критерий функциональной разделимости булевых функций и с его помощью разыскивается соотношение между функционально разделимыми и симметрическими булевыми функциями.

2. Функция n переменных $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется **функционально разделимой**, если существуют такие функции $g(z_1, z_2, \ldots, z_{n-s+1})$ и $h(z_2, z_2, \ldots, z_s)$, что

$$1 < s < n \text{ и } f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g(h(y_1, y_2, \ldots, y_s), y_{s+1}, \ldots, y_n),$$

где $y_1, y_2, \ldots, y_s$ — некоторое подмножество переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, а $y_{s+1}, y_{s+2}, \ldots, y_n$ — остальные из этих переменных*.

Иными словами, функционально разделимая функция представима в виде подстановки функции не менее двух переменных в функцию не менее двух же переменных.

По определению функционально разделимые функции возможны лишь начиная с $n = 3$. Тривиальным примером функционально разделимых функций являются суммы и произведения, составленные из переменных и их отрицаний.

Реализация функции $f = g(h, \ldots)$ сводится к реализации функций g и h и подстановке схемы для h в схему для g («блочный метод

* Это определение несколько отличается от определения К. Э. Шеннона. Он требовал, чтобы $1 < s < n-1$.

синтеза»). Благодаря этому функционально разделимые функции, вообще говоря, требуют значительно меньше контактов, чем функции произвольного вида ([3]).

3. Ввиду простоты схемной реализации функционально разделимых функций желательно обладать критерием функциональной разделимости булевых функций. Предлагаемый ниже критерий теоретически весьма прост, но требует больших вычислений.

В дальнейшем под словом «разложение» будет пониматься разложение на конституенты единицы. Мы будем считать, что члены разложения расположены в лексикографическом порядке, причем x_i предшествует $\bar{x}_i$.

Критерий функциональной разделимости дается следующей теоремой:

Теорема 1. *Функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ функционально разделима тогда и только тогда, когда хотя бы для одного подмножества $y_1, y_2, \ldots, y_r$ переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, где $0 < r < n-1$, существует такая функция h остальных переменных, что все отличные от 0 и 1 коэффициенты разложения функции f по $y_1, y_2, \ldots, y_r$ равны либо h, либо $\bar{h}$.*

Таким образом, чтобы найти функциональное разделение данной функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ либо убедиться в ее функциональной неразделимости, надо для каждого подмножества надлежащей мощности r переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ найти отличные от 0 и 1 коэффициенты разложения по этому подмножеству и сравнить их с первым отличным от 0 и 1 коэффициентом и его отрицанием. Если хотя бы в одном разложении все отличные от 0 и 1 коэффициенты равны либо первому коэффициенту, либо его отрицанию, то f — функционально разделимая функция. В противном случае f функционально неразделима.

Сравнивать коэффициенты с первым и его отрицанием следует по мере их нахождения, не дожидаясь нахождения всех коэффициентов; тогда после обнаружения первого неравенства можно прекратить дальнейшее исследование данного разложения. Перед исследованием целесообразно разложить функцию по всем переменным. Это облегчает вычисления.

В качестве простого примера возьмем функцию

$$f(x, y, z) = xy\bar{z} + \bar{x}yz + \bar{x}\bar{y}\bar{z}.$$

Разложение по x дает

$$f_1 = y\bar{z}, \quad f_2 = yz + \bar{y}\bar{z}, \quad f_2 \neq f_1, \quad f_2 \neq \bar{f}_1;$$

разложение по y дает

$$f_1 = x\bar{z} + \bar{x}z, \quad f_2 = \bar{x}\bar{z}, \quad f_2 \neq f_1, \quad f_2 \neq \bar{f}_1;$$

разложение по z дает

$$f_1 = \bar{x}y, \quad f_2 = xy + \bar{x}\bar{y}, \quad f_2 \neq f_1, \quad f_2 \neq \bar{f}_1.$$

Следовательно, функция f функционально неразделима.

Из теоремы 1 вытекают две теоремы:

Теорема 2. *Из*

$$f = g(h(y_1, y_2, \ldots, y_s), y_{s+1}, \ldots, y_n)$$

следует

$$\bar{f} = \bar{g}(h(y_1, y_2, \ldots, y_s), y_{s+1}, \ldots, y_n),$$

т. е. f и $\bar{f}$ либо обе функционально разделимы, либо обе функционально неразделимы.

Теорема 3. *Пусть функция* $Ng(z_1, z_2, \ldots, z_{n-s+1})$ *получается из* $g(z_1, z_2, \ldots, z_{n-s+1})$ *заменой* z_1 *на* $\bar{z}_1$. *Тогда, если* $g(h(y_1, y_2, \ldots, y_s), y_{s+1}, \ldots, y_n) = g'(h'(y_1, y_2, \ldots, y_s) y_{s+1}, \ldots, y_n)$, *то либо* $g = g'$, $h = h'$, *либо* $g = Ng'$, $h = \bar{h}'$. *Обратно, из* $f = g(h, \ldots)$ *следует* $f = Ng(\bar{h}, \ldots)$.

4. Симметрические функции образуют другой класс простых функций ([1-3]). Применяя описанный критерий, можно ответить на вопрос о соотношении между функционально разделимыми и симметрическими функциями.

Теорема 4. *Единственными функционально разделимыми симметрическими функциями являются* $x_1 x_2 \ldots x_n$, $\bar{x}_1 \bar{x}_2 \ldots \bar{x}_n$, $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$, $\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \ldots + \bar{x}_n$, *сумма по модулю два* $x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n$ *и ее отрицание* $\bar{x}_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n$*.

Теорему 4 можно несколько обобщить, распространив ее на класс функций, однотипных (в смысле статьи ([4])) с симметрическими функциями. Тогда мы получим следующую теорему:

Теорема 5. *Единственными функционально разделимыми функциями, однотипными с симметрическими функциями, являются* $x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n$, $\bar{x}_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n$ *и функции вида* $\tilde{x}_1 \tilde{x}_2 \ldots \tilde{x}_n$ *или* $\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 + \ldots + \tilde{x}_n$, *где* $\tilde{x}_i$ *есть либо* x_i, *либо* $\bar{x}_i$.

Функциональная разделимость функций $x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n$ и $\bar{x}_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n$ позволяет добиться их особенно простой реализации по сравнению с другими функциями в классе параллельно-последовательных схем.

Математический институт
им В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
29 X 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. А. Гаврилов, Теория релейно-контактных схем, М.—Л., 1950. [2] C. E. Shannon, Trans. AIEE, **57**, 713 (1938). [3] C. E. Shannon, BSTJ, **28**, 1, 59 (1949). [4] G. Pólya, J. Symb. Log., **5**, 3, 98 (1940).

* О функции $x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n$ см. ([2]).