Доклады Академии Наук СССР
1954. Том XCIV, № 5

МАТЕМАТИКА

Л. Я. НЕЙШУЛЕР

О ТАБУЛИРОВАНИИ СТРОКИ ТЕЙЛОРА У ФУНКЦИЙ ТРЕХ ПЕРЕМЕННЫХ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 29 X 1953)

В настоящей заметке излагается метод табулирования функций трех переменных для тех случаев, когда требования точности таковы, что: 1) обычная таблица с тремя прямыми входами (одночленная) для систем всех нужных значений аргументов приводит к чрезмерно большому объему; 2) доступная по объему таблица, состоящая из: а) одночленной таблицы значений функций для систем, соответственно, редких последовательностей значений аргументов, и б) таблицы „поправок за первые производные“, приводит к погрешности, превосходящей допустимую. Учет же и „поправок за вторые производные“ обычным путем, очевидно, сильно усложняет технику оперирования.

Основная идея метода заключается в том, что путем введения соответствующих вспомогательных функций* и соответствующего выбора шагов аргументов (позволяющих „за малостью“ избавиться от мешающих удобному табулированию членов) выражение для соответствующих членов строки Тэйлора приводится к виду, удобному для k-членного табулирования. Построение k-членной таблицы здесь облегчается также и малой (по сравнению с основными значениями функции) значностью этих членов, играющих роль „поправок“. Возможность же табулирования членов выше первого порядка (мы здесь рассматриваем случай табулирования членов до второго порядка включительно) часто позволяет не только существенно увеличить точность таблиц, учитывающих лишь „поправки за первые производные“, но одновременно и существенно уменьшить их объем. Притом часто это достигается за счет незначительного усложнения в технике оперирования. Это и дает в соответствующих случаях возможность находить удовлетворительное по объему точности и технике оперирования табличное решение.

Пусть надо протабулировать функцию трех переменных

$$v(x_1, x_2, x_3). \tag{1}$$

Разложим в ряд Тейлора по малым приращениям Δx_1, Δx_2 и Δx_3, соответственно, аргументов x_1, x_2 и x_3 функцию трех переменных

$$u = \Phi[v(x_1, x_2, x_3)], \tag{2}$$

где Φ — некоторая вспомогательная функция одного переменного.

---

* В практике встречаются случаи, когда некоторые из вспомогательных функций представляют самостоятельный интерес.

Ограничиваясь членами второго порядка малости и введя обозначение

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial v^2} = F(v) = F[\Phi^{-1}(u)] = \Psi(u),$$

получим искомое u в виде:

$$u = u_0 + \Delta u_{x_1} + \Delta u_{x_2} + \Delta u_{x_3} + \Delta u_{x_1x_1} + \Delta u_{x_2x_2} + \Delta u_{x_3x_3} + \Delta u_{x_1x_2} + \\ + \Delta u_{x_1x_3} + \Delta u_{x_2x_3},$$

где:

$$\begin{aligned}
&1)\ \Delta u_{x_1} = \Delta x_1 \frac{\partial v}{\partial x_1}\frac{\partial\Phi}{\partial v};\\
&2)\ \Delta u_{x_2} = \Delta x_2 \frac{\partial v}{\partial x_2}\frac{\partial\Phi}{\partial v};\\
&3)\ \Delta u_{x_3} = \Delta x_3 \frac{\partial v}{\partial x_3}\frac{\partial\Phi}{\partial v};\\
&4)\ \Delta u_{x_1x_1} = \frac{(\Delta x_1)^2}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x_1}\right)^2\Psi(u) + \frac{(\Delta x_1)^2}{2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}\right)^2\frac{\partial\Phi}{\partial v};\\
&5)\ \Delta u_{x_2x_2} = \frac{(\Delta x_2)^2}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x_2}\right)^2\Psi(u) + \frac{(\Delta x_2)^2}{2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}\right)^2\frac{\partial\Phi}{\partial v};\\
&6)\ \Delta u_{x_3x_3} = \frac{(\Delta x_3)^2}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x_3}\right)^2\Psi(u) + \frac{(\Delta x_3)^2}{2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_3^2}\right)^2\frac{\partial\Phi}{\partial v};\\
&7)\ \Delta u_{x_1x_2} = \Delta x_1\Delta x_2\frac{\partial v}{\partial x_1}\frac{\partial v}{\partial x_2}\Psi(u) + \Delta x_1\Delta x_2\frac{\partial^2 v}{\partial x_1\partial x_2}\frac{\partial\Phi}{\partial v};\\
&8)\ \Delta u_{x_1x_3} = \Delta x_1\Delta x_3\frac{\partial v}{\partial x_1}\frac{\partial v}{\partial x_3}\Psi(u) + \Delta x_1\Delta x_3\frac{\partial^2 v}{\partial x_1\partial x_3}\frac{\partial\Phi}{\partial v};\\
&9)\ \Delta u_{x_2x_3} = \Delta x_2\Delta x_3\frac{\partial v}{\partial x_2}\frac{\partial v}{\partial x_3}\Psi(u) + \Delta x_2\Delta x_3\frac{\partial^2 v}{\partial x_2\partial x_3}\frac{\partial\Phi}{\partial v}.
\end{aligned} \tag{3}$$

Пусть в качестве функции Φ можно выбрать такую $\overline{\Phi}$, что в „поправках" 4) — 9) члены, содержащие $\partial\Phi/\partial v$, малы по сравнению с членами, содержащими $\Psi(u)$, так что ими можно пренебречь.

Рассмотрим два случая: 1-й случай, когда один из аргументов, например x_3, является параметром, принимающим небольшое число (m) фиксированных значений $c_1, c_2, \ldots, c_m$ (такие случаи в вычислительной практике не редкость), и 2-й случай, когда аргумент x_3 меняется также непрерывно.

1-й случай. В этом случае поступаем следующим образом:

1) в основной одночленной таблице помещаем значения нашей функции (2) для всех m значений аргумента x_3; в связи с этим в (3) исчезают поправки 3), 6) и 9).

2) Заметив, что в выражениях для оставшихся пяти поправок повторяются функции $\partial v/\partial x_1$ и $\partial v/\partial x_2$ (зависящие от тех же трех переменных x_1, x_2 и x_3), делаем их вспомогательными и помещаем их значения в основной одночленной таблице наряду со значениями нашей функции *. Введя обозначения $\partial\Phi/\partial v = \eta(u)$, $\partial v/\partial x_1 = v_1$ и $\partial v/\partial x_2 = v_2$,

* Это не увеличивает объема основной таблицы по сравнению с ее же объемом в случае таблицы, учитывающей лишь „поправки" за первые производные, так как освобождает от необходимости помещать значения соответствующих разностей.

можно выражение для „поправок за первые и вторые производные" написать в виде

$$v_1\Delta x_1\eta(u) + v_2\Delta x_2\eta(u) + v_1^2\frac{(\Delta x_1)^2}{2}\Psi(u) + v_2^2\frac{(\Delta x_2)^2}{2}\Psi(u) + v_1\Delta x_1 v_2\Delta x_2\Psi(u). \tag{4}$$

Выражение (4) представляет функцию пяти переменных: v_1, Δx_1, v_2, Δx_2 и u, которую можно записать в виде

$$F[f_1(\Delta x_1,\ v_1),\ f_2(\Delta x_2,\ v_2),\ u]. \tag{5}$$

Если число необходимых табличных значений, которые принимают в (4) прямые аргументы (аргументы, отмечающие строки или столбцы) Δx_1 и Δx_2 и промежуточные функции f_1 и f_2, таковы, что трехчленная (состоящая из трех компонент) таблица функции четырех переменных $F[f_1(\Delta x_1,\ v_1),\ f_2(\Delta x_2,\ v_2),\ \mathrm{const}]$ умещается на одной странице или одном развороте доступного формата, то для выражения (4) возможна табличная конструкция T_2 с 5 входами, описанная в [1] (стр. 1555—1557). В этом случае предлагаемая нами таблица для определения значений $v(x_1,\ x_2,\ x_3)$ будет содержать 9 входов: а) 3 входа в основную таблицу T_1, содержащую значения трех функций: $u = \overline{\Phi}[v(x_1,\ x_2,\ x_3)]$, $\partial v/\partial x_1$ и $\partial v/\partial x_2$ трех переменных x_1, x_2 и x_3; б) 5 входов в таблицу T_2 для выражения (4) и в) 1 вход в таблицу T_3 функции одного переменного $v = \overline{\Phi}^{-1}(u)$.

В таблице, учитывающей лишь „поправки за первые производные", содержится 7 входов — 3 в основной и 2 раза по 2 входа в таблицу „поправок за первые производные", т. е. всего на 2 входа меньше. Если к этому добавить, что в этой таблице надо произвести сложение 3 чисел, находимых в 3 местах, а в T_2 — сложение 2 чисел, находимых в 2 местах, то можно будет признать, что техника оперирования у них почти совпадает. Возможность же учитывать „поправки за вторые производные" может быть использована либо для существенного увеличения точности, либо для существенного уменьшения объема за счет возможного при учете „вторых поправок" увеличения шага аргументов, либо частично для увеличения точности и частично для уменьшения объема.

Если же число табличных значений, которые принимают в (4) Δx_1, Δx_2, f_1 и f_2, благодаря присутствию в (4) членов первого порядка приводит в T_2 к практически недоступному формату, то следует для „первых поправок" дать обычную табличку, а в T_2 табулировать лишь члены второго порядка выражения (4).

В этом случае, очевидно, значительно уменьшится число необходимых табличных значений Δx_1, Δx_2, f_1 и f_2, а следовательно, и формат.

2-й случай. В отличие от 1-го случая, здесь поправки 3), 6), 8) и 9) не равны нулю. Для поправки 3), представляющей член 1-го порядка, можно пользоваться обычной табличной *PP*. Что касается учета „вторых поправок", то здесь можно указать два способа.

1-й способ. Пусть шаги h_1, h_2 и h_3 (соответственно, аргументов x_1, x_2 и x_3), при которых еще можно пренебрегать членами 2-го порядка 6), 8) и 9), приводят к объему, в k раз превосходящему заданный.

Заменим шаги h_1, h_2 и h_3, соответственно, шагами kh_1, kh_2 и h_3/k. Легко видеть, что при такой замене шагов объем уменьшится в k раз и станет равным заданному, 2-я производная по x_3 (поправка 6) уменьшится при этом в k^2 раз, а в поправках 8) и 9) увеличение шага по x_1 и x_2 скомпенсируется уменьшением шага по x_3. Изложенное выше, очевидно, предполагает, что членами порядка выше 2-го при этом можно пренебречь.

2-й способ. Он заключается в том, что с поправкой 3) поступаем как и в 1-м способе, а для учета остальных поправок 2-го порядка 6), 8) и 9) поступаем следующим образом: а) в таблице T_1 помещаем дополнительно вспомогательную функцию $\partial v/\partial x_3$, б) в таблице T_2 наряду со значениями выражения (5) помещаем соответствующие значения

$$w = \Delta x_1 \frac{\partial v}{\partial x_1} + \Delta x_2 \frac{\partial v}{\partial x_2}\,^{*}; \tag{6}$$

в) строим серию двухчленных таблиц с тремя входами [2], отвечающих определенной (определяемой нужной точностью) последовательности значений u** для выражения

$$\left[\frac{(\Delta x_3)^2}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x_3}\right)^2 + w\Delta x_3 \frac{\partial v}{\partial x_3}\right]\Psi(u), \quad (w \text{ то же, что в (6)}),$$

которое и представляет собой сумму наших поправок 6), 8) и 9). В остальном поступаем так же, как и в 1-м случае. Этот способ несколько увеличивает число входов, но зато соответственно уменьшает погрешность, либо объем, либо и то и другое.

Примечания. 1. Описанные здесь таблицы поправок можно, очевидно, оформить и графически.

2. Изложенный здесь метод, очевидно, допускает распространение и на членов строки Тэйлора выше 2-го порядка.

Поступило
8 VII 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. Я. Нейшулер, Изв. АН СССР, ОТН, № 11 (1947). [2] Л. Я. Нейшулер, Изв. АН СССР, ОТН, № 8 (1948).

* Для удобства повторяем их на всех страницах (разворотах), отвечающих разным u.

** Можно последовательность значений u здесь и в T_2 объединить (построить общую), тогда число входов уменьшится на один.