Доклады Академии Наук СССР
1954. Том XCV, № 1

ФИЗИКА

Л. Д. БАХРАХ

О МАКСИМАЛЬНОМ КОЭФФИЦИЕНТЕ НАПРАВЛЕННОГО ДЕЙСТВИЯ ЛИНЕЙНОЙ И ПЛОСКОЙ АНТЕНН

(Представлено академиком А. И. Бергом 24 XII 1953)

Представляет значительный интерес выяснить условия получения максимального коэффициента направленного действия у линейной и плоской антенн заданных размеров в определенном направлении. Аналогичная задача для сферических антенн решалась А. З. Фрадиным [1].

Будем рассматривать двумерную задачу; такое рассмотрение справедливо для линейной антенны и плоской антенны, у которой распределение поля в двух взаимно-перпендикулярных плоскостях не зависит друг от друга.

В работе А. А. Пистолькорса [2] предложен метод расчета линейной и плоской антенн при помощи функций Матье; этот метод расчета весьма удобен для практических расчетов при пользовании табулированными функциями Матье. Согласно [2] диаграмма направленности может быть задана в виде ряда из функций Матье параметра h (соответствующего заданной ширине раскрыва):

$$F(\varphi) = A_1 \operatorname{se}_1(h, \varphi) + \ldots + A_n \operatorname{se}_n(h, \varphi), \tag{1}$$

где $h = kl/4$; $k = 2\pi/\lambda$; l — длина антенны; φ — угол, отсчитываемый от оси линейной антенны или от плоскости.

В зависимости от формы диаграммы направленности и степени точности ее воспроизведения необходимо использовать различное число порядков функций Матье.

Рассмотрим, каким соотношениям должны удовлетворять коэффициенты A_i при функциях Матье для реализации максимального коэффициента направленного действия в направлении φ_0 при n заданных функциях Матье.

Коэффициент направленного действия для полупространства в случае линейной или плоской антенны в направлении φ_0 можно записать в виде

$$D = \frac{F^2(\varphi_0)\,\pi}{\int\limits_0^\pi F^2(\varphi)\,d\varphi}, \tag{2}$$

где $F^2(\varphi_0) = [A_1 \operatorname{se}_1(h, \varphi_0) + \ldots + A_n \operatorname{se}_n(h, \varphi_0)]^2$.

Для определения коэффициентов A_i, обеспечивающих максимальное значение D, следует приравнять частные производные $\partial D / \partial A_i$ нулю.

Предварительно преобразуем знаменатель выражения (2); подставим вместо $F(\varphi)$ ряд (1) и учтем ортогональность функций Матье. В результате получим:

$$D = \frac{2\,[A_1 \operatorname{se}_1(h, \varphi_0) + \ldots + A_n \operatorname{se}_n(h, \varphi_0)]^2}{(A_1^2 + \ldots + A_n^2)}. \tag{3}$$

Продифференцировав выражение (3) по A_i и приравняв производные нулю; получим систему уравнений следующего вида:

$$\frac{-[A_1\,\mathrm{se}_1(h,\varphi_0)+\ldots+A_n\,\mathrm{se}_n(h,\varphi_0)]\,2A_1+2\mathrm{se}_1(h,\varphi_0)\,[A_1^2+\ldots+A_n^2]}{(A_1^2+\ldots+A_n^2)}=0,$$

$$\frac{-[A_1\,\mathrm{se}_1(h,\varphi_0)+\ldots+A_n\,\mathrm{se}_n(h,\varphi_0)]\,2A_n+2\mathrm{se}_n(h,\varphi_0)\,[A_1^2+\ldots+A_n^2]}{(A_1^2+\ldots+A_n^2)}=0. \tag{4}$$

Преобразуя уравнения системы (4), получим соотношения, связывающие коэффициенты A_i:

$$\frac{A_1}{\mathrm{se}_1(h,\varphi_0)}=\frac{A_2}{\mathrm{se}_2(h,\varphi_0)}=\ldots=\frac{A_n}{\mathrm{se}_n(h,\varphi_0)}=\frac{A_1^2+\ldots+A_n^2}{A_1\,\mathrm{se}_1(h,\varphi_0)+\ldots+A_n\,\mathrm{se}_n(h,\varphi_0)}. \tag{5}$$

Легко теперь найти выражение для $D_{\max_n}$; после соответствующих преобразований получаем:

$$D_{\max_n}=[2\,[\mathrm{se}_1^2(h,\varphi_0)+\ldots+\mathrm{se}_n^2(h,\varphi_0)]. \tag{6}$$

Индекс n при $D_{\max_n}$ означает, что $D_{\max_n}$ вычисляется для n гармоник Матье.

Посмотрим теперь, как изменяется $D_{\max}$ при значении n, стремящемся к бесконечности. Представив функции Матье в виде рядов Фурье, можно показать, что выражение (6) переходит в следующее:

$$\lim_{p\to\infty} D_{\max_p}=\sin^2\varphi_0+\ldots+\sin^2 m\varphi_0+\ldots \tag{7}$$

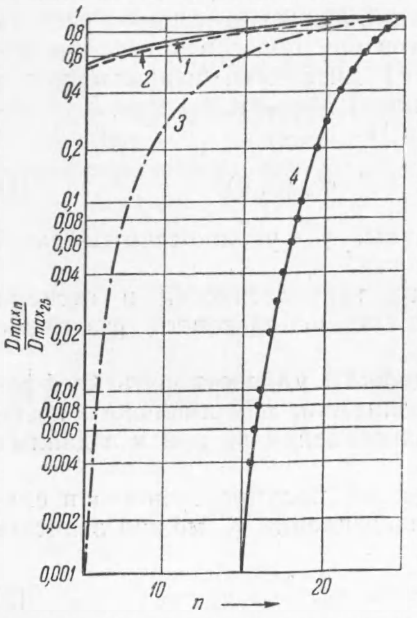

Рис. 1. Кривые зависимости коэффициента максимального усиления от числа гармоник Матье n для различных φ_0. *1* — $\varphi_0=90°$, *2* — $80°$, *3* — $45°$, *4* — $10°$

Воспользовавшись соотношением

$$\sum_{m=1}^{p}\sin^2 m\,\varphi_0=\frac{p}{2}-\frac{\cos(p+1)\,\varphi_0\cdot\sin p\varphi_0}{2\sin\varphi_0}, \tag{8}$$

можно видеть, что выражение (6) стремится к бесконечности при $p\to\infty$ пропорционально возрастанию p.

Таким образом, приведенные расчеты показывают, что принципиально можно от ленточной антенны заданных размеров получить сколь угодно большой коэффициент направленного действия (К.Н.Д.). Этот результат не является неожиданным и аналогичен выводу Фрадина для сферической антенны.

На рис. 1 представлены результаты расчета зависимости $D_{\max_n}$ для различных углов φ_0 от числа гармоник функций Матье n. Расчеты были проведены для $l/\lambda=10{,}58$ и $\varphi_0=10$, 45, 80 и 90°.

Максимальное значение К. Н. Д. при использовании 25 гармоник Матье принято за единицу для различных φ_0, однако следует иметь в виду, что абсолютное значение $D_{\max_{25}}$ для $\varphi_0=90°$ примерно в 2 раза превышает $D_{\max_{25}}$ для $\varphi_0=10°$ и в 1,5 раза $D_{\max_{25}}$ при $\varphi_0=45°$.

Представляет интерес выяснить, какие значения принимает поле в раскрыве антенны при реализации максимального К. Н. Д., в частности, как связаны относительное изменение потерь в антенне и пиковые значения поля в раскрыве с величиной $D_{\max}$.

Будем полагать, что изучаемая мощность нормирована, т. е.

$$\frac{\pi}{2}(A_1^2 + \ldots + A_n^2) = 1. \tag{9}$$

Легко показать, что при этом выражение (6) для $D_{\max_n}$ сохраняется.

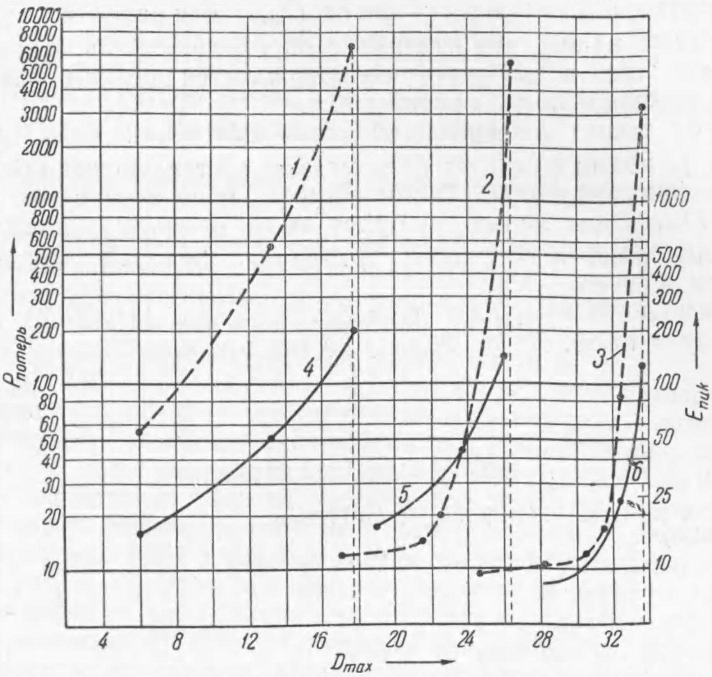

Рис. 2. *1* — $P_{\text{пот}}$ для $\varphi_0 = 10°$; *2* — $P_{\text{пот}}$ для $\varphi = 45°$; *3* — $P_{\text{пот}}$ для $\varphi_0 = 90°$; *4* — $E_{\text{пик}}$ для $\varphi_0 = 10°$; *5* — $E_{\text{пик}}$ для $\varphi_0 = 45°$; *6* — $E_{\text{пик}}$ для $\varphi = 90°$

Поле в раскрыве антенны, обеспечивающее $D_{\max_n}$ с точностью до постоянного множителя, можно записать в виде (учитывая выражения (5), (9) и (2)):

$$E = \frac{1}{\sqrt{D_{\max_n}}}[Hs_1^{(2)}(h,0)\,\mathrm{se}_1(h,\varphi_0)\,\mathrm{se}_1(h,\varphi) - iHs_2^{(2)}(h,0)\,\mathrm{se}_2(h,\varphi_0)\,\mathrm{se}_2(h,\varphi) +$$

$$+ Hs_3^{(2)}(h,0)\,\mathrm{se}_3(h,\varphi_0)\,\mathrm{se}_3(h,\varphi) + \ldots], \tag{10}$$

где $Hs_1^{(2)}$ — нечетные функции Матье — Ганкеля второго рода (2). Таким образом поле в раскрыве антенны выражено в виде суммы гармоник Матье, коэффициент при каждой из которых пропорционален произведению $Hs_n^{(2)}(h, 0)\,\mathrm{se}_n(h, \varphi_0)$.

Относительная величина потерь в антенне в случае обеспечения $D_{\max_n}$ и постоянной излучаемой мощности может быть с точностью до постоянного множителя, зависящего, в частности, от сопротивления потерь, приближенно выражена в виде;

$$P_{\text{пот}} \approx \frac{[Hs_1^{(2)}(h,0)\,\mathrm{se}_1(h,\varphi_0)]^2 + \ldots + [Hs_n^{(2)}(h,0)\,\mathrm{se}_n(h,0)]^2}{D_{\max_n}}. \tag{11}$$

Зависимость $P_{пот}$ от D_{max} показана на рис. 2 для различных углов φ_0 ($l/\lambda = 10{,}58$). Из представленной на рис. 2 кривой следует, что увеличение D_{max_n}*, начиная с определенного значения D_{max_n}, связано со значительным относительным возрастанием $P_{пот}$.

Пиковые значения поля в раскрыве при условии обеспечения D_{max_n} также существенно зависят от величины К.Н.Д. Начиная с определенных величин К.Н.Д., реализуемых при высоких порядках функций Матье, пиковые значения поля в раскрыве определяются в основном высшими гармониками Матье. На рис. 2 представлена зависимость пикового значения поля в раскрыве от D_{max_n} для различных φ_0. Из этих кривых также видно, что начиная с определенной величины К.Н.Д. дальнейшее его возрастание сопровождается резким возрастанием пиковых значений поля в раскрыве.

Следует также добавить, что при получении D_{max_n} для малых значений φ_0 доминирующую роль играют составляющие поля высших порядков функций Матье. Таким образом, поле в раскрыве при обеспечении D_{max_n} для малых φ_0 будет иметь осциллирующий характер, соответствующий, в основном, поведению функций Матье высших порядков.

Выражаю глубокую благодарность чл.-корр. АН СССР А. А. Пистолькорсу и проф. Я. Н. Фельду за ценные замечания.

Поступило
14 VIII 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. З. Фрадин, ЖТФ, 9, № 13, 1161 (1939). [2] А. А. Пистолькорс, ДАН, 89, № 5 (1953).

* Подразумевается увеличение D_{max_n} вследствие роста числа n.