Доклады Академии Наук СССР
1954. Том XCV, № 1

ФИЗИКА

М. Я. АЗБЕЛЬ и М. И. КАГАНОВ

К ТЕОРИИ АНОМАЛЬНОГО СКИН-ЭФФЕКТА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

(Представлено академиком Л. Д. Ландау 21 XII 1953)

1. В настоящем сообщении рассматривается отражение плоской монохроматической волны частоты ω от поверхности металла, помещенного в постоянное магнитное поле H_0. Магнитное поле перпендикулярно поверхности металла, направление распространения электромагнитной волны параллельно магнитному полю.

Поведение электронов проводимости описывается при помощи функции распределения f, которая удовлетворяет известному кинетическому уравнению ([1]):

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}}\mathbf{v} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}}\mathbf{F} = -\frac{f - f_0}{\tau}. \tag{1}$$

Здесь $\mathbf{F}$ — сила, действующая на электрон, в нашем случае

$$\mathbf{F} = e\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{v}, \mathbf{H}] + \frac{1}{c}[\mathbf{v}, \mathbf{H}_0]\right); \tag{2}$$

$\mathbf{E}, \mathbf{H}$ — переменные составляющие электромагнитного поля в металле; f_0 — фермиевская функция распределения; $\mathbf{v}$ — скорость электрона, в общем случае

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}}, \tag{3}$$

где ε и $\mathbf{p}$ — энергия и квазиимпульс электрона; τ — время релаксации. Плотность тока проводимости при этом равна

$$\mathbf{j} = \frac{2e}{(2\pi\hbar)^3}\int \mathbf{v}(\mathbf{p}) f(t;\ \mathbf{r}, \mathbf{p})\, d\tau_{\mathbf{p}} \tag{4}$$

($d\tau_{\mathbf{p}} = dp_x\, dp_y\, dp_z$, интегрирование ведется по всему $\mathbf{p}$-пространству).

Наличие магнитного поля ограничивает применимость кинетического уравнения (1) той областью температур и магнитных полей, где

$$\hbar\omega_L \ll kT \quad \left(\omega_L = \frac{eH_0}{mc}\right).$$

Мы будем предполагать, что это условие всегда выполнено.

2. В работе ([1]) и в ряде других работ ([2], [3]), используя решения уравнения (1) при $H_0 = 0$, построена теория частотной зависимости поверхностного импеданса металлов в предположении, что

$$\varepsilon = \frac{p^2}{2m}. \tag{5}$$

Легко видеть, что упомянутая теория не нуждается в подобном упрощающем предположении, а формулы, полученные в ([1]) для $Z = \frac{4\pi}{c}\frac{E(0)}{H(0)}$, справедливы при произвольном изотропном законе дисперсии $\varepsilon = \varepsilon(p)$.

Результаты работы ([1]) удается, кроме того, обобщить на случай анизотропии эффективных масс. Считая, что

$$\varepsilon = \frac{p_x^2}{2m_x} + \frac{p_y^2}{2m_y} + \frac{p_z^2}{2m_z}, \tag{6}$$

можно найти

$$Z_j = \frac{8}{9}\left(\sqrt{3}\,\pi\omega^2 \frac{l_z}{\sigma_j}\right)^{1/3} (1 + \sqrt{3}\,i)\,^*. \tag{7}$$

Здесь $j = x, y$ и предположено, что электрическое поле направлено вдоль оси j (ось z перпендикулярна поверхности металла);

$$\frac{\sigma_j}{l_z} = \frac{e^2 n^{2/3}}{(3\pi^2)^{1/3}} \frac{m_z}{m_j} \sqrt[6]{\frac{m_x m_y}{m_z^2}}. \tag{8}$$

Выражение (7) справедливо для предельного случая больших по сравнению со скиновой глубиной проникновения длин свободного пробега и зеркального отражения электронов от границы металла.

3. Вернемся к решению поставленной задачи. Введем в рассмотрение отклонение функции распределения f_1 от ее равновесного значения

$$f_1 = f - f_0.$$

Линеаризуя кинетическое уравнение (3), получим, считая закон дисперсии изотропным:

$$\frac{1 + i\omega\tau}{\tau v} f_1 + n_z \frac{\partial f_1}{\partial z} + \frac{1}{r}\left(n_x \frac{\partial f_1}{\partial n_y} - n_y \frac{\partial f_1}{\partial n_x}\right) = \frac{e}{v} \frac{\partial f_0}{\partial p} (n_x E_x + n_y E_y). \tag{9}$$

Здесь $r = pc / eH_0$, а $\mathbf{n}$ — единичный вектор в направлении $\mathbf{p}$ ($\mathbf{n} = \mathbf{p}/p$).

Решение уравнения (9) ищем в виде

$$f_1 = n_x C_1(z) + n_y C_2(z). \tag{10}$$

Обозначив $C_\pm = C_1 \pm iC_2$, $E_\pm = E_x \pm iE_y$, из (9) получаем

$$\frac{\partial C_\pm}{\partial z} + \frac{1 + i(\omega \mp \Omega)\tau}{\tau v_z} C_\pm = \frac{e}{v_z} \frac{\partial f_0}{\partial p} E_\pm, \tag{11}$$

где $\Omega = -veH_0 / pc$ (при $v = p/m$ $\Omega = \omega_L$).

Решение уравнения (11) с обычными граничными условиями ([1, 4]) после подстановки в выражение для плотности тока (4) дает

$$j_\pm = \frac{2\pi e^2 p^2}{(2\pi\hbar)^3}\left\{q \int_{-\infty}^{\infty} K_\pm\left(\frac{z-t}{e}\right) E_\pm(t)\,dt + (1-q) \int_0^{\infty} K_\pm\left(\frac{z-t}{e}\right) E_\pm(t)\,dt\right\}. \tag{12}$$

Здесь

$$K_\pm(u) = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3\theta}{\cos\theta}\, e^{-\frac{1+i(\omega\pm\Omega)\tau}{\cos\theta}|u|}\, d\theta. \tag{13}$$

Параметр q указывает на характер отражения электронов на границе металла; $q = 1$ соответствует зеркальному отражению, $q = 0$ диффузному рассеянию ([1, 4]). Все величины берутся при $p = (3\pi^2)^{1/3} n^{1/3} 2\pi\hbar$.

Полученная связь между электрическим полем и током совпадает с аналогичным выражением теории аномального скин-эффекта в отсут-

---

* $Z_x = \frac{4\pi}{c} \frac{E_x(0)}{H_y(0)}$; $\quad Z_y = -\frac{4\pi}{c} \frac{E_y(0)}{H_x(0)}$.

ствие магнитного поля (см. формулу (14) из ([1])) с точностью до сдвига частоты ω на величину $\mp\Omega$. Это позволяет воспользоваться результатами цитированной работы:

$$Z_{\pm}=\frac{8i\omega l}{c^2}\frac{1}{1+i(\omega\mp\Omega)\tau}\int\limits_0^\infty\frac{dt}{t^2+\xi_{\pm}K(t)}; \tag{14}$$

$$Z_{\pm}=\frac{4\pi}{c}\frac{E_x(0)\pm iE_y(0)}{H_y(0)\mp iH_x(0)};$$

$$\xi_{\pm}=\frac{\frac{3}{2}i\,\frac{l^2}{\delta^2}}{[1+i(\omega\mp\Omega)\tau]^3};\qquad K(t)=\frac{2}{t^3}\{(1+t^2)\operatorname{arc\,tg}t-t\}.$$

Мы ограничились случаем зеркального отражения электронов от поверхности металла ($q=1$) как более легким; из ([1]) и из дальнейшего ясно, что диффузное рассеяние существенно не изменяет значения поверхностного импеданса.

Когда $|\xi_{\pm}|\ll 1$, т. е. когда

$$\frac{3}{2}\frac{l^2}{\delta^2}\ll[1+(\omega\mp\Omega)^2\tau^2]^{3/2}, \tag{15}$$

можно показать, что первое приближение получается при замене функции $K(t)$ ее значением в нуле ($K(0)={}^4/_3$). Вычисляя получающийся элементарный интеграл, находим

$$Z_{\pm}^{\text{кл}}=\sqrt{\frac{2\pi\omega}{c^2\sigma}}\left\{\sqrt{\sqrt{(\omega\mp\Omega)^2\tau^2+1}-(\omega\mp\Omega)\tau}+\right.$$
$$\left.+i\sqrt{\sqrt{(\omega\mp\Omega)^2\tau^2+1}+(\omega\mp\Omega)\tau}\right\}. \tag{16}$$

(Мы обозначили найденное выражение $Z_{\pm}^{\text{кл}}$, отметив этим тот факт, что оно может быть получено заменой $\omega\tau$ на $(\omega\mp\Omega)\tau$ в классическом выражении для импеданса).

В обратном предельном случае

$$\frac{3}{2}\frac{l^2}{\delta^2}\gg[1+(\omega\mp\Omega)^2\tau^2]^{3/2} \tag{15'}$$

импеданс не зависит от величины магнитного поля

$$Z_{\pm}=\frac{8}{9}\left(\sqrt{3}\frac{\pi\omega^2 l}{c^4\sigma}\right)^{1/3}(1+\sqrt{3}i). \tag{17}$$

Условия применимости выражений (16) и (17) существенно зависят от величины магнитного поля (см. (15) и (15')).

4. При отражении электромагнитной волны от поверхности металла происходит ряд эффектов (скачок фазы, изменение направления поляризации, поглощение энергии), численные характеристики которых легко получить, зная отношение амплитуд отраженных волн к амплитуде падающей волны E_0.

Если считать, что падающая волна поляризована вдоль оси x, то:

$$\frac{(E_{\text{отр}})_x}{E_0}=\frac{1}{2}\left\{\frac{\frac{cZ_+}{4\pi}-1}{\frac{cZ_+}{4\pi}+1}+\frac{\frac{cZ_-}{4\pi}-1}{\frac{cZ_-}{4\pi}+1}\right\},$$
$$\tag{18}$$
$$\frac{(E_{\text{отр}})_y}{E_0}=\frac{1}{2}\left\{\frac{\frac{cZ_+}{4\pi}-1}{\frac{cZ_+}{4\pi}+1}-\frac{\frac{cZ_-}{4\pi}-1}{\frac{cZ_-}{4\pi}+1}\right\}.$$

5. Рассмотрим более подробно явление резонанса ($\omega=\Omega$) в условиях аномального скин-эффекта, т. е. при $l/\delta \gg 1$. Последнее неравенство показывает, что Z_+ определяется формулой (17):

$$Z_+ = \frac{8}{9}\left(\sqrt{3}\,\frac{\pi\Omega^2 l}{c^4\sigma}\right)^{1/3}(1+\sqrt{3}\,i) \quad (\omega=\Omega). \tag{19}$$

Если $\Omega\tau \gg 1$, то возможно, что

$$1 \ll \frac{l}{\delta} \ll (\Omega\tau)^{3/2}, \tag{20}$$

и Z_- определяется формулой (16)

$$Z_- = 2\sqrt{\Omega\tau}\left(\frac{2\pi\Omega}{c^2\sigma}\right)^{1/2}\left(i+\frac{1}{4\Omega\tau}\right). \tag{19'}$$

Заменив ω через Ω, легко убеждаемся, что условия (20) действуют в одну сторону:

$$r \ll \sqrt{\frac{c^2\tau}{2\pi\sigma}}; \quad r \ll \sqrt{\frac{c^2\tau}{2\pi\sigma}}\left(\frac{l}{\sqrt{c^2\tau/2\pi\sigma}}\right)^3.$$

Какое из двух условий более строго, зависит от соотношения между длиной свободного пробега l и величиной $\sqrt{\frac{c^2\tau}{2\pi\sigma}}$, которая равна $\frac{a}{\pi\sqrt{2}}\left(\frac{mc^2}{e^2 a}\right)^{1/2} \simeq 10^2 a$ (здесь a—атомные размеры, $m=p/v$).

В заключение авторы пользуются случаем выразить благодарность И. М. Лифшицу за ценные советы, а также А. А. Галкину за обсуждение полученных результатов.

Поступило
26 XI 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] G. E. H. Reuter, E. H. Sondheimer, Proc. Roy. Soc., **195**, 336 (1949).
[2] А. А. Абрикосов, ДАН, **87**, 43 (1952). [3] R. B. Dingle, Physica, **19**, 311 (1953).
[4] K. Fuchs, Proc. Cambr. Phil. Soc., **34**, 100 (1938).