Доклады Академии Наук СССР
1954. Том XCV, № 1

ГИДРАВЛИКА

А. Л. ХЕЙН

ПРИМЕНЕНИЕ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ К ТЕОРИИ НЕУСТАНОВИВШЕГОСЯ ПРИТОКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА К НЕСОВЕРШЕННЫМ СКВАЖИНАМ

(Представлено академиком А. И. Некрасовым 30 XII 1953)

Как известно, дифференциальное уравнение для потенциала массовой скорости флюида Φ

$$a\nabla^2\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial t} \tag{1}$$

охватывает случай фильтрации жидкости и газа, если для исследования неустановившейся фильтрации газа пользоваться линеаризованным И. А. Чарным ([1]) уравнением Лейбензона. При этом при фильтрации жидкости потенциалу Φ отвечает плотность жидкости ρ и коэффициенту a — коэффициент пьезопроводности $\varkappa$, а при фильтрации газа Φ отвечает функция Лейбензона P и коэффициенту a — коэффициент $\bar{\varkappa} = k\bar{\alpha} / m\mu$, где k — проницаемость, m — пористость, μ — вязкость газа и $\bar{\alpha}$ — постоянная, определяемая значениями давления на границах интервала линеаризации уравнения (1).

Пользуясь для интегрирования уравнения (1) методами операционного исчисления и методом собственных функций, можно показать, что при неустановившемся и линейном притоке жидкости или газа к скважине с произвольным характером гидродинамического несовершенства, но с меридионально-симметричной конструкцией забоя * изображение $\Phi_\lambda(r, z, \alpha, \lambda)$ функции $\Phi(r, z, \alpha, t)$ в однородном цилиндрическом пласте с непроницаемой кровлей и подошвой (при условии постоянства Φ по пласту в начальный момент времени $t = 0$) описывается выражением:

$$\Phi_\lambda(r, z, \alpha, \lambda) = \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_{n,m}\Phi_{\lambda,n,m}(r)\cos\frac{m\pi}{h}z\cos n\alpha =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_{n,m}\left\{A_{n,m}I_n\left[\left(\frac{m\pi}{h}\right)^2+\frac{\lambda}{a}\right]^{1/2} r + B_{n,m}K_n\left[\left(\frac{m\pi}{h}\right)^2+\frac{\lambda}{a}\right]^{1/2} r + \right.$$

$$\left. + \delta_{n,m}\frac{\Phi_{\text{н}}}{\lambda}\right\}\cos\frac{m\pi}{h}z\cos n\alpha. \tag{2}$$

Здесь $\varepsilon_{0,0} = 1/2$; $\varepsilon_{0,m} = \varepsilon_{0,n} = 1$; $\varepsilon_{n,m} = 2$; $\delta_{0,0} = 4$; $\delta_{n,m} = 0$, если $n \neq 0$ или $m \neq 0$, и, по определению,

$$\Phi_{\lambda,n,m}(r) = \frac{2}{\pi h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}\,dt\int_0^{2\pi}\int_0^h \Phi(r, z, \alpha, t)\cos\frac{m\pi}{h}z\cos n\alpha\,dz\,d\alpha; \tag{3}$$

---

* Поверхность, по которой скважина дренирует пласт, называется меридионально-симметричной, если хотя бы одна из плоскостей, проходящих через ось скважины, делит эту поверхность на две симметричные этой плоскости части.

r, z, α — цилиндрические координаты произвольной точки в пласте при условии, что ось z совмещена с осью скважины (начало координат на подошве пласта), а начальная плоскость отсчета угла α является плоскостью меридиональной симметрии забоя скважины; h — мощность пласта; λ — комплексная переменная; I_n и K_n — цилиндрические функции от мнимого аргумента первого и второго рода n-го порядка; $A_{n,m}$ и $B_{n,m}$ — определяемые граничными условиями постоянные коэффициенты.

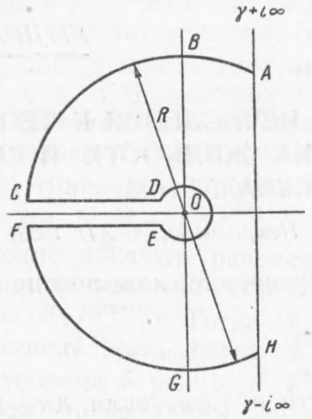

Рис. 1

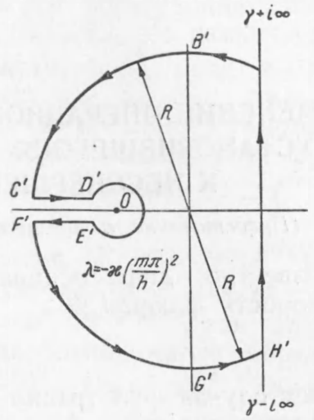

Рис. 2

При дренировании скважиной бесконечного пласта из условия конечности потенциала Φ на бесконечности следует, что $A_{n,m} = 0$, и (2) принимает вид:

$$\Phi_\lambda(r, z, \alpha, \lambda) = \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_{n,m}\Phi_{\lambda,n,m}(r)\cos\frac{m\pi}{h}z\cos n\alpha =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_{n,m}\left\{B_{n,m}K_n\left[\left(\frac{m\pi}{h}\right)^2 + \frac{\lambda}{a}\right]^{1/2} r + \delta_{n,m}\frac{\Phi_{\text{н}}}{\lambda}\right\}\cos\frac{m\pi}{h}z\cos n\alpha. \quad (4)$$

Выражение (4) используем для исследования неустановившегося притока жидкости и газа к скважинам с меридионально-симметричной конструкцией забоя, дренирующих бесконечный пласт при условии постоянства потенциала Φ на забое скважины.

По условиям задачи:

$$\Phi(r, z, \alpha, 0) = \Phi_{\text{н}} = \text{const} \quad \text{при } t = 0; \quad (5)$$

$$\Phi(r_{\text{c}}, z, \alpha, t) = \Phi_{\text{c}}(z, \alpha) \quad \text{при } r = r_{\text{c}} \text{ и } t > 0; \quad (6)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = 0 \text{ и } z = h,\ t > 0. \quad (7)$$

Исходя из (3) и (4), в соответствии с граничным условием (6), находим коэффициенты $B_{n,m}$. Подставляя их в (4), получим следующее выражение для изображения потенциала Φ:

$$\Phi_\lambda(r, z, \alpha, \lambda) = \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_{n,m}\left\{\left[\eta^{\text{c}}_{n,m} - \delta_{n,m}\Phi_n\right]\frac{K_n\left[\left(\frac{m\pi}{h}\right)^2 + \frac{\lambda}{a}\right]^{1/2} r}{\lambda K_n\left[\left(\frac{m\pi}{h}\right)^2 + \frac{\lambda}{a}\right]^{1/2} r_{\text{c}}} + \right.$$

$$\left. + \delta_{n,m}\frac{\Phi_{\text{н}}}{\lambda}\right\}\cos\frac{m\pi}{h}z\cos n\alpha, \quad (8)$$

где

$$\eta^{c}_{n,m}=\frac{2}{\pi h}\int_0^{2\pi}\int_0^{h}\Phi(r,z,\alpha)_{r=r_c}\cos\frac{m\pi}{h}z\cos n\alpha\,dz\,d\alpha. \tag{9}$$

Коэффициенты $\eta^{c}_{n,m}$ выражают преобразованные граничные условия задачи. Оригинал выражения (7) находим по теореме обращения. Интегрирование в плоскости комплексной переменной проводим по контуру, изображенному на рис. 1 и 2, поскольку подинтегральная функция имеет точки разветвления:

$$\lambda=-a\left(\frac{m\pi}{h}\right)^2 \quad \text{при } m\neq 0;$$

$$\lambda=0 \quad \text{при } m=0.$$

Проведя контурное интегрирование, получим следующее выраженное в общем виде решение задачи:

$$\Phi(r,z,\alpha,t)=\Phi_{\text{н}}+[\varepsilon_{n,m}\eta^{c}_{n,m}-\delta_{n,m}\Phi_{\text{н}}]\times$$

$$\times\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\left\{\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{e^{-au^2t}[J_n(ur)Y_n(ur_c)-J_n(ur_c)Y_n(ur)]\,u\,du}{\left[u^2+\left(\frac{m\pi}{h}\right)^2\right][J_n^2(ur_c)+Y_n^2(ur_c)]}+f_{n,m}\right\}\times$$

$$\times\cos\frac{m\pi}{h}z\cos n\alpha, \tag{10}$$

где $\varepsilon_{0,0}={}^1/_4$; $\varepsilon_{n,0}=\varepsilon_{m,0}={}^1/_2$; $\varepsilon_{n,m}=1$; $\delta_{0,0}=1$; $\delta_{n,m}=0$, если $n\neq 0$ или $m\neq 0$; $f_{n,0}=1$; $f_{n,m}=K_n\left(\frac{m\pi}{h}r\right)\Big/K_n\left(\frac{m\pi}{h}r_c\right)$.

Из уравнения (10) в качестве частного случая вытекает формула для распределения потенциала Φ в бесконечном пласте, дренируемом скважиной, совершенной по характеру и степени вскрытия пласта.

Ввиду равномерного распределения Φ на забое такой скважины все коэффициенты $\eta^{c}_{n,m}$, для которых $n\neq 0$ или $m\neq 0$, согласно (9) исчезают.

Так как $\eta^{c}_{0,0}=4\Phi_c$, то формула (10) принимает вид:

$$\Phi=\Phi_{\text{н}}+[\Phi_c-\Phi_{\text{н}}]\left[\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{e^{-au^2t}[J_0(ur)Y_0(ur_c)-J_0(ur_c)Y_0(ur)]}{J_0^2(ur_c)+Y_0^2(ur_c)}\frac{du}{u}+1\right]. \tag{11}$$

При фильтрации газа (1)

$$\Phi=P=\bar{\alpha}p_{\text{н}}e^{-p_{\text{н}}/\bar{\alpha}}\left(e^{p/\bar{\alpha}}-1\right), \tag{12}$$

где $\bar{\alpha}=\dfrac{p_{\text{н}}-p_c}{\ln(p_{\text{н}}/p_c)}$.

Заменяя в (11) a на $\bar{\varkappa}$ и подставляя вместо Φ, Φ_c и $\Phi_{\text{н}}$ вытекающие для них из (12) выражения, получим после простых преобразований:

$$p(r)=p_{\text{н}}+\bar{\alpha}\ln\left\{1+\left[e^{-\frac{p_{\text{н}}-p_c}{\bar{\alpha}}}-1\right]\times\right.$$

$$\left.\times\left[\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{e^{-\bar{\varkappa}u^2t}[J_0(ur)Y_0(ur_c)-J_0(ur_c)Y_0(ur)]}{J_0^2(ur_c)+Y_0^2(ur_c)}\frac{du}{u}+1\right]\right\}. \tag{13}$$

Формула (13) описывает распределение давления газа в бесконечном пласте, дренируемом совершенной скважиной при условии $p_c=\text{const}$.

Для жидкости, подчиняющейся закону Гука,

$$\Phi = \rho = \rho_0 + \rho_0 \frac{p - p_0}{K_ж}, \tag{14}$$

где $K_ж$ — модуль упругости жидкости.

Заменяя в (11) a на $\varkappa$ и подставляя вместо Φ, $\Phi_с$ и $\Phi_н$ вытекающие для них из (14) выражения, получим:

$$p(r) = p_н + \\ + [p_с - p_н]\left[\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-\varkappa u^2 t}\,[J_0(ur)\,Y_0(ur_с) - J_0(ur_с)\,Y_0(ur)]}{J_0^2(ur_с) + Y_0^2(ur_с)}\frac{du}{u} + 1\right]. \tag{15}$$

Формула (15) дает распределение давления жидкости в бесконечном пласте, дренируемом совершенной скважиной при условии $p_с = \text{const}$.

Формулы (14) и (15) могут быть использованы для определения параметров пласта по данным наблюдения за ходом изменения давления на забое реагирующих скважин при пуске совершенной возмущающей скважины.

Всесоюзный нефтегазовый
научно-исследовательский
институт

Поступило
28 X 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. А. Чарный, Изв. АН СССР, ОТН, № 6 (1951).