Доклады Академии Наук СССР
1954. Том XCIV, № 4

ФИЗИКА

Б. Т. ГЕЙЛИКМАН

К ТЕОРИИ СВЕРХПРОВОДИМОСТИ

(Представлено академиком М. А. Леонтовичем 11 XII 1953)

В ([1]) были исследованы уравнения квантовой гидродинамики для незаряженной жидкости.

Рассмотрим теперь заряженную квантовую жидкость в электромагнитном поле. В этом случае оператор плотности тока $\mathbf{j}$ имеет вид: $\mathbf{j} = \frac{\hbar}{2i}(\Psi^+\nabla\Psi - \nabla\Psi^+\Psi) - \frac{e}{c}\Psi^+\Psi\mathbf{A}$, и к гамильтониану жидкости следует прибавить гамильтониан поля (см. ([2])):

$$H = \int\Big[{}^1/_2\mathbf{v}\rho\mathbf{v} + w(\rho) + e\Psi^+\Psi\varphi + 2\pi c^2\left(\frac{\vec{\Pi}^2}{\eta} - \frac{\Pi_4^2}{\eta^2}\right) + \frac{(\operatorname{rot}\mathbf{A})^2}{8\pi} - c\left(\sum_i^3 \Pi_i\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} + \Pi_4\frac{\operatorname{div}\mathbf{A}}{\eta}\right)\Big]d\mathbf{r}; \tag{1}$$

$\Pi_4 = \partial L/\partial\dot{\varphi}$; $(A_4)_0 = \varphi_0 = 0$ $(\mathbf{E}_0 = 0)$; $\mathbf{v} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho}\mathbf{j} + \mathbf{j}\frac{1}{\rho}\right)$; $\rho = m\Psi^+\Psi$;

η — диэлектрическая проницаемость жидкости; введение η целесообразно, так как в гидродинамике $\lambda_{\text{ср}} \gg n^{-1/3}$ (λ — длина волны, n — плотность частиц). Зависимость η от частоты может быть учтена после разложения H по осцилляторам поля.

Импульсы, сопряженные компонентам четырехмерного потенциала, связаны с $\mathbf{A}$ и φ соотношениями ([2]):

$$\vec{\Pi} = \frac{\eta}{4\pi c}\left(\frac{1}{c}\dot{\mathbf{A}} + \nabla\varphi\right); \quad \Pi_4 = \frac{-\eta}{4\pi c}\left(\frac{\eta\dot{\varphi}}{c} + \operatorname{div}\mathbf{A}\right).$$

Нетрудно показать, что соотношения коммутации для j_i, ρ и j_i, j_k в ([1]) можно получить не только при бозевских, но и при фермиевских соотношениях коммутации между Ψ^+ и Ψ: $\Psi^+\Psi' + \Psi'\Psi^+ = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ и т. д. Однако даже в случае статистики Ферми для самих частиц усредненная «гидродинамическая» плотность ρ, входящая в $w(\rho)$, не должна быть ограничена уже фермиевским соотношением для $\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = m\Psi^+(\mathbf{r})\Psi(\mathbf{r}')$: $\rho^2(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = m\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$. В гидродинамической модели статистика, которой подчиняются частицы, определяет лишь зависимость w от ρ. Поэтому можно думать, что для «гидродинамических» операторных функций Ψ^+, Ψ всегда следует выбирать бозевские соотношения коммутации.

В ([1]) было показано, что низший уровень энергии системы находится из условий:

$$\frac{\delta H}{\delta\psi_0^*} = \frac{\delta H}{\delta\psi_0} = \frac{\delta H}{\delta A_{i0}} = \frac{\delta H}{\delta\Pi_{i0}} = 0 \quad (i = 1, \ldots, 4),$$

т. е.
$$\frac{(v^0)^2}{2} + w'(\rho_0) + \frac{e}{m}\varphi_0 = \frac{1}{m}\varepsilon_0; \quad \operatorname{div}(\rho_0\mathbf{v}^0) = 0;$$
$$\varphi_0 = 0; \quad \Delta\mathbf{A}_0 = -\frac{4\pi e}{mc}\rho_0\mathbf{v}^0, \tag{2}$$

где $\mathbf{v}_0 = \frac{\hbar}{2mi}\left(\frac{\nabla\psi_0}{\psi_0} - \frac{\nabla\psi_0^*}{\psi_0^*}\right) - \frac{e}{mc}\mathbf{A}_0$; ψ_0, A_{0i} и Π_{0i} — классические величины.

Примем, что $\Psi^+ = \psi_0^* + \psi^+$; $\Psi = \psi_0 + \psi$; $A_i = A_{0i} + A_i'$; $\Pi_i = \Pi_{0i} + \Pi_i'$, и разложим H в ряд по ψ^+, ψ, A_i, Π_i: $H = H^0 + H^{2)} + \ldots$ Ограничиваясь членом $H^{(2)}$, находим $\dot{\psi}^+ = \frac{i}{\hbar}[H^{(2)}, \psi^+]$ и т. д. Вместо ψ^+ и ψ при $\psi_0 = \mathrm{const}$ удобно ввести переменные: $\rho^{(1)} = m(\psi_0^*\psi + \psi_0\psi^+)$ — член первого порядка в разложении ρ по ψ^+ и ψ и $\chi = \frac{\hbar}{2mi}\left(\frac{\psi}{\psi_0} - \frac{\psi^+}{\psi_0^*}\right)$; $\mathbf{v}^{(1)} = \operatorname{grad}\chi - \frac{e}{mc}\mathbf{A}'$; $\mathbf{v}^{(1)}$ — член первого порядка в разложении $\mathbf{v}$; при $\psi_0 = \mathrm{const}$ χ и $\rho^{(1)}$ являются каноническими переменными: $[\chi(\mathbf{r}), \rho^{(1)}(\mathbf{r}')] = -i\hbar\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ *. Тогда (для $\mathbf{v}^0 = \mathbf{A}_0 = 0$):
$$\dot{\chi} + w_0''\rho^{(1)} + \frac{e}{m}\varphi' = 0; \quad \dot{\rho}^{(1)} + \rho_0\Delta\chi - \frac{e}{mc}\rho_0\operatorname{div}\mathbf{A}' = 0;$$
$$\Delta\mathbf{A}' - \frac{\eta}{c^2}\ddot{\mathbf{A}}' = -\frac{4\pi e\rho_0}{mc}\left(\nabla\chi - \frac{e}{mc}\mathbf{A}'\right); \quad \Delta\varphi' - \frac{\eta}{c^2}\ddot{\varphi}' = -\frac{4\pi e}{\eta m}\rho^{(1)}. \tag{3}$$

Решение имеет вид $\sim e^{i(\mathbf{k},\,\mathbf{r}) - i\omega t}$; для собственных значений $\varepsilon_k = \hbar\omega_k$ получаем две поперечные ветви $(\mathbf{A}_k' \perp \mathbf{k})$: $\omega_1^2 = \omega_2^2 = (\omega_0^2 + c^2k^2)/\eta$ и одну продольную ветвь $(\mathbf{A}_k' \parallel \mathbf{k})$: $\omega_3^2 = \frac{\omega_0^2}{\eta} + s^2k^2$; $\omega_0^2 = \frac{4\pi e^2\rho_0}{m^2}$; $s^2 = w_0''\rho_0$. В случае $\mathbf{v}^0 \neq 0$ ω_i зависят от $\mathbf{v}^0$. В формулах для ω_i η зависит, вообще говоря, от ω. Таким образом, все частоты отличны от нуля и удовлетворяют условию сверхтекучести Ландау ([3]).

Найдем ротор скорости в основном состоянии $\mathbf{v}^0 = \frac{\hbar}{2mi}\left(\frac{\nabla\psi_0}{\psi_0} - \frac{\nabla\psi_0^*}{\psi_0^*}\right) - \frac{e}{mc}\mathbf{A}_0$: $\operatorname{rot}\mathbf{v}^0 = -\frac{e}{mc}\mathbf{H}_0$ — для $\mathbf{v}^0$ получаем уравнение Лондона. Мы видим, что уравнение Лондона всегда имеет место для таких состояний квантовых заряженных систем, когда вторично квантованная функция Ψ равна классической величине (вырожденные состояния). Вырождение такого типа возможно лишь в случае бозевских соотношений коммутации между Ψ^+ и Ψ, но при этом в гидродинамической модели необязательно, чтобы сами частицы подчинялись статистике Бозе. В ([1]) было показано, что вырожденные состояния системы, при которых $\Psi \simeq \psi_0$, соответствуют низшему уровню энергии системы и имеют чисто квантовую природу (аналогично эйнштейновской конденсации).

Отметим, что и для скорости $\mathbf{v}^{(1)} = \nabla\chi - \frac{e}{mc}\mathbf{A}'$ выполняется соотношение Лондона: $\operatorname{rot}\mathbf{v}^{(1)} = -\frac{e}{mc}\mathbf{H}'$.

В гидродинамической модели диэлектрическая проницаемость η может оказаться очень большой (ср. ([4])). При $\omega = 0$ $\eta = 1 + \frac{4\pi e^2}{m} \times \sum_i \frac{n_{0i}}{\omega_{0i}^2}$, где n_{0i} — числа заполнения, соответствующие переходам из

---

* χ и $\rho^{(1)}$ были впервые введены в качестве канонических переменных Б. И. Давыдовым.

основного состояния 0 в состояние i, $\omega_{0i} = \frac{E_i - E_0}{\hbar}$ — частоты этих переходов. Для длинноволновой части спектра ω_{0i} и n_{0i} зависят от η. Если главную роль играют гидродинамические частоты, то $\sum \frac{n_{0i}}{\omega_{0i}^2} = \frac{n_0 \eta}{\omega_{\text{эфф}}^2} + A$; $\omega_{\text{эфф}}^2 \simeq \omega_0^2$; $\frac{\partial A}{\partial \eta} \simeq 0$; при $\frac{\omega_{\text{эфф}}^2 - \omega_0^2}{\omega_0^2} \ll 1 \quad \eta \gg 1$.

Можно рассмотреть также заряженную жидкость, связанную с решеткой (см. [5]). При этом уравнения (3) для $\rho^{(1)}$ и χ не изменяются, а уравнения для φ' и $\mathbf{A}'$ приобретают вид:

$$\Delta\varphi' - \frac{\eta}{c^2}\ddot{\varphi}' = -\frac{4\pi e}{m\eta}(\rho^{(1)} + \rho_0 \operatorname{div} \mathbf{u}); \quad \Delta\mathbf{A}' - \frac{\eta}{c^2}\ddot{\mathbf{A}}' = -\frac{4\pi e\rho_0}{mc}\left(\nabla\chi - \frac{e}{mc}\mathbf{A}' - \dot{\mathbf{u}}\right)$$

и прибавляется уравнение для вектора деформации решетки $\mathbf{u}$:

$$\ddot{\mathbf{u}} - (a^2 - b^2)\nabla \operatorname{div} \mathbf{u} - b^2 \Delta u = \frac{e}{M}\left(\nabla\varphi' + \frac{1}{c}\dot{\mathbf{A}}\right); \quad a \approx b \approx 10^5 \text{ см/сек.}$$

В этом случае получаются две продольные и четыре поперечные ветви частот. Частоты поперечных ветвей равны:

$$\omega_{1,2,3,4}^2 = \frac{\omega_0^2(1 + m/M) + (c^2 + b^2\eta)k^2}{2\eta} \mp$$

$$\mp \frac{1}{2\eta}\sqrt{\left[\omega_0^2\left(1 + \frac{m}{M}\right) + (c^2 + b^2\eta)k^2\right]^2 - \eta 4 b^2 k^2(\omega_0^2 + c^2 k^2)};$$

$$\omega_1^2 = \omega_2^2 \approx \frac{\omega_0^2}{\eta}\left(1 + \frac{m}{M}\right) + \frac{c^2k^2}{\eta}; \quad \omega_3^2 = \omega_4^2 \approx b^2k^2;$$

частоты продольных ветвей определяются из уравнения:

$$(a^2k^2 - \omega^2)\left(\frac{\omega_0^2}{\eta} + s^2k^2 - \omega^2\right) - \frac{m}{M}\frac{\omega_0^2}{\eta}(\omega^2 - s^2k^2) = 0;$$

$$\omega_5^2 \simeq \omega_0^2\left(1 + \frac{m}{M}\right) + s^2k^2; \quad \omega_6^2 \simeq \left(a^2 + \frac{m}{M}s^2\right)k^2; \quad \frac{m}{M}s^2 \approx a^2.$$

Интересно, что частота продольных колебаний решетки $\omega \simeq ak$ при наличии связи с жидкостью изменяется и при $\mathbf{v}^0 \neq 0$ оказывается зависящей от $\mathbf{v}^0$. Из условия сверхтекучести [3] $\varepsilon(\mathbf{p}) - (\mathbf{v}, \mathbf{p}) = 0$ нетрудно найти критическую скорость $v_к \simeq a$ и соответствующее критическое поле $H_к = \sqrt{4\pi\rho_0}\, v_к \simeq 10^3$ эрст (a и, следовательно, $H_к$ зависят от массы иона M). Однако эта оценка может оказаться неправильной, так как критическая скорость, а также температура перехода определяются главным образом коротковолновыми возбуждениями [1], которые не могут быть рассмотрены в рамках гидродинамики. В случае электронной ферми-жидкости исследование коротковолновых возбуждений особенно важно, так как спектр этих возбуждений должен, повидимому, существенным образом определяться особенностями статистики Ферми и взаимодействием с решеткой.

Условие применимости нашей теории имеет вид (см. [1]): $H^{(3)} \ll H^{(2)}$; $H^{(4)} \ll H^{(2)}$. Неравенство $H^{(3)} \ll H^{(2)}$ накладывает ряд условий на s, N_0/V, m, a, b, M. В случае заряженной жидкости, связанной с решеткой, эти неравенства, которые, очевидно, играют роль условий сверхпроводимости в гидродинамической модели, имеют довольно сложный вид.

В заключение рассмотрим заряженный неидеальный бозе-газ с электромагнитным взаимодействием между частицами (бозе-плазма). Гамильтониан системы равен

$$H = H_f + \frac{1}{2m}\int \Psi^+ \left(\frac{\hbar}{i}\nabla - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 \Psi\, d\mathbf{r} + e\int \Psi^+\Psi\varphi\, d\mathbf{r} +$$

$$+ \frac{1}{2}\int \Psi^+(\mathbf{r})\,\Psi^+(\mathbf{r}')\,U(\mathbf{r},\,\mathbf{r}')\,\Psi(\mathbf{r})\,\Psi(\mathbf{r}')\,d\mathbf{r}\,d\mathbf{r}';$$

H_f — гамильтониан поля. Уравнение $\frac{\delta H}{\delta\psi_0} = 0$ для ψ_0 имеет вид ([1]):

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\nabla - \frac{e}{c}\mathbf{A}_0\right)^2\psi_0 + \int |\psi_0(\mathbf{r}')|^2\, U(\mathbf{r},\,\mathbf{r}')\,d\mathbf{r}'\psi_0 = \varepsilon_{min}\psi_0.$$

Аналогичное нелинейное уравнение было предложено в ([6]) для феноменологического описания сверхпроводящего состояния.

Поскольку система подчиняется бозевским соотношениям коммутации, для скорости $\mathbf{v}^0$ в основном состоянии, как и в гидродинамике, получается уравнение Лондона. Напишем уравнения для ψ^+, ψ, A_i', Π_i'; вместо ψ^+ и ψ удобно ввести χ и $\rho^{(1)}$ (см. выше). Тогда получаются такие же уравнения, как уравнения (3) в гидродинамике, лишь первое уравнение (3) заменяется уравнением: $\dot{\chi} + \frac{1}{m^2}\int U(\mathbf{r},\mathbf{r}')\,\rho^{(1)}(\mathbf{r}')\,d\mathbf{r}' -$

$- \frac{\hbar^2}{4m^2}\frac{\Delta\rho^{(1)}}{\rho_0} + \frac{e}{m}\varphi' = 0$ $(\mathbf{v}_0 = 0)$. Частоты оказываются равными:

$$\omega_1^2 = \omega_2^2 = \frac{\omega_0^2 + c^2k^2}{\eta}, \quad \omega_3^2 = \frac{\omega_0^2}{\eta} + \frac{1}{m}\left(\frac{N_0}{V}\int e^{-i(\mathbf{k},\,\mathbf{r})}U(\mathbf{r})\,d\mathbf{r} + \frac{p^2}{2m}\right)k^2;$$

при малых k $\omega_3^2 \simeq \frac{\omega_0^2}{\eta} + s^2k^2$; $s = \sqrt{\frac{N_0}{mV}\int U\,d\mathbf{r}}$ — скорость звука для неидеального бозе-газа (см. ([7])). Введение $\eta \neq 1$ имеет смысл лишь для $k \ll (N_0/V)^{1/3}$. Таким образом, длинноволновые возбуждения бозе-плазмы совпадают с гидродинамическими возбуждениями.

Выражаю благодарность В. Л. Гинзбургу за дружескую дискуссию.

Московский государственный
педагогический институт
им. В. И. Ленина

Поступило
10 X 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. Гейликман, ДАН, 94, № 2 (1954). [2] Г. Вентцель, Квантовая теория волновых полей, 1947, стр. 137. [3] Л. Д. Ландау, ЖЭТФ, 11, 592 (1941). [4] В. Л. Гинзбург, Усп. физ. наук, 42, 345 (1950); 48, 80 (1952). [5] Б. Гейликман, ЖЭТФ, 21, 618 (1951). [6] В. Л. Гинзбург, Л. Д. Ландау, ЖЭТФ, 20, 1064 (1950). [7] Н. Н. Боголюбов, Изв. АН СССР, сер. физ., 11, 77 (1947).