Доклады Академии Наук СССР
1954. Том XCIV, № 4

ФИЗИКА

А. И. АХИЕЗЕР

ДИФФРАКЦИОННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ ФОТОНОВ ЧАСТИЦАМИ СО СПИНОМ $^1/_2$

(Представлено академиком Л. Д. Ландау 14 XII 1953)

1. Поглощение быстрых частиц ядрами вызывает возмущение падающей волны, вследствие чего возникает упругое рассеяние частиц. Если частицы обладают зарядом, то при этом может происходить и излучение фотонов. Это упругое рассеяние и рассеяние с излучением фотона могут быть названы диффракционным рассеянием и диффракционным излучением. Диффракционный механизм излучения фотонов π-мезонами, могущими поглощаться нуклонами, был указан и изучен Л. Д. Ландау и И. Я. Померанчуком ([1]). В настоящей заметке мы рассмотрим аналогично диффракционное рассеяние частиц со спином $^1/_2$ (в частности протонов) поглощающими ядрами, считая ядро абсолютно черным шариком и предполагая, что частицы удовлетворяют уравнению Дирака.

2. Сформулируем прежде всего принцип Гюйгенса для спинорных волн. Принцип Гюйгенса устанавливает связь между значением волновой функции в некоторой точке $\mathbf{r}$ и значениями волновой функции на замкнутой поверхности S, окружающей эту точку. Для скалярной функции, удовлетворяющей уравнению $\Delta\varphi + p^2\varphi = 0$, эта связь имеет, как известно, вид

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_S \left\{ \frac{e^{ip|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\frac{\partial\varphi(\mathbf{r}')}{\partial n} - \varphi(\mathbf{r}')\frac{\partial}{\partial n}\frac{e^{ip|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right\} ds', \tag{1}$$

где $\mathbf{r}'$ лежит на S и n — внешняя нормаль к S.

Для монохроматических спинорных волн, удовлетворяющих уравнениям Дирака

$$\left(\vec{\gamma}\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}} - \gamma_4 E + m\right)\psi(\mathbf{r}) = 0, \quad \gamma_i\gamma_k + \gamma_k\gamma_i = 2\delta_{ik},$$

где m — масса частицы*, принцип Гйюгенса может быть сформулирован следующим образом:

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_S \left(\vec{\gamma}\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}} - \gamma_4 E - m\right)\frac{e^{ip|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\mathbf{n}\vec{\gamma}\psi(\mathbf{r}')\,ds' \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{(2\pi)^3}\iint\limits_S (ip_\mu\gamma_\mu - m)\frac{e^{ip(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}}{p^2+m^2-E^2}\vec{\gamma}\mathbf{n}\,\psi(\mathbf{r}')\,ds'\,d^3p, \tag{2}$$

где $p = \sqrt{E^2 - m^2}$ и $\mathbf{n}$ — единичный вектор в направлении внешней нормали к S.

Доказательство (2) получается немедленно, если преобразовать поверхностный интеграл в объемный и воспользоваться тем, что $\vec{\gamma}\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}'}\psi(\mathbf{r}') = (E\gamma_4 - m)\psi(\mathbf{r}')$. Правая часть (2) приобретает при этом вид

$$-\frac{1}{4\pi}\int\left(\vec{\gamma}\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}'} + \gamma_4 E + m\right)\left(\vec{\gamma}\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}'} + \gamma_4 E - m\right)\frac{e^{ip|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\psi(\mathbf{r}')\,d^3r' =$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\int(\Delta_r + p^2)\frac{e^{ip|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\psi(\mathbf{r}')\,d^3r' = \int\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\psi(\mathbf{r}')\,d^3r' = \psi(\mathbf{r}).$$

---

* Мы считаем, что $c = \hbar = 1$ и пользуемся хевисайдовой единицей заряда.

Заметим, что, в отличие от (1), в (2) не входят производные от волновой функции.

3. Определим при помощи (2) сечение диффракционного упругого рассеяния частиц абсолютно черным поглощающим ядром радиуса R. Считая на поверхности ядра $\psi(r')=0$, получим следующее выражение для $\psi(r)$ вдали от ядра:

$$\psi(r) \underset{r\to\infty}{=} u_{\mathbf{p}} e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}} + \frac{1}{4\pi p} \frac{e^{ipr}}{r} (i\vec{\gamma}\,\mathbf{p}' - \gamma_4 E - m)\,\vec{\gamma}\,\mathbf{p}\,u_{\mathbf{p}} \int\limits_S e^{-i\mathbf{p}'\mathbf{r}'}\, d^2 r',$$

где $u_{\mathbf{p}}$ — спинорная амплитуда плоской падающей волны с импульсом $\mathbf{p}$ и энергией E, $\mathbf{p}' = p\dfrac{\mathbf{r}}{r}$ и интегрирование совершается по площади круга радиуса R. Для малых углов диффракции θ это выражение может быть приведено к виду

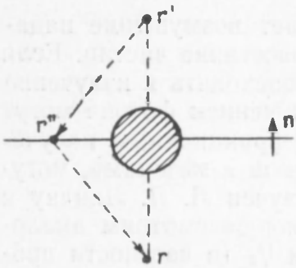

Рис. 1

$$\psi(r) \underset{r\to\infty}{=} u_{\mathbf{p}}\, e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}} + i\,\frac{e^{ipr}}{r}\,\frac{RJ_1(pR\theta)}{\theta}\, u_p,$$

который не отличается от соответствующего выражения для скалярной волны. Сечение рассеяния в телесном угле do определяется известной формулой

$$d\sigma = \left(\frac{RJ_1(pR\theta)}{\theta}\right)^2 do. \tag{3}$$

4. Определим теперь сечение диффракционного рассеяния частицы с испусканием фотона. В уравнения Дирака для частицы, находящейся в электромагнитном поле $A_\mu(x)$,

$$\left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m\right)\psi = ie\gamma_\mu A_\mu \psi.$$

Мы заменим в правой части ψ на сумму плоской волны и волны, диффрагированной около абсолютно черного ядра:

$$\psi_0(x) = \Phi_0(\mathbf{r})\, e^{-iEt},$$
$$\Phi_0(\mathbf{r}) = u_{\mathbf{p}} e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}} - \frac{1}{4\pi}\left(\vec{\gamma}\,\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'} - \gamma_4 E - m\right) \int\limits_S \frac{e^{ip\,|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,\vec{\gamma}\,\mathbf{n}\,u_{\mathbf{p}}\, ds', \tag{4}$$

где $\mathbf{n} = -\mathbf{p}/p$ (интегрирование совершается по площади круга радиуса R), а вместо A_μ подставим поле, соответствующее одному фотону с энергией ω, импульсом $\mathbf{k}$ и поляризацией e_μ:

$$A_\mu = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}\, e_\mu e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{r}-\omega t)}.$$

Волновую функцию частицы при наличии этого фотона ищем в виде $\psi = \Phi(\mathbf{r})e^{-iE't}$, где $E' = E - \omega$ и $\Phi(\mathbf{r})$ удовлетворяет уравнению

$$\left(\vec{\gamma}\,\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} - \gamma_4 E' + m\right)\Phi(\mathbf{r}) = \frac{ie}{\sqrt{2\omega}}\,\mathbf{e}\vec{\gamma} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}\Phi_0(\mathbf{r}). \tag{5}$$

Решение (5) может быть представлено в виде

$$\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{ie}{\sqrt{2\omega}} \int G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\mathbf{e}\vec{\gamma} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}'}\Phi_0(\mathbf{r}')\, d^3 r', \tag{6}$$

где G — функция Грина. Для свободного пространства эта функция имеет вид

$$G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi}\left(\vec{\gamma}\,\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} - \gamma_4 E' - m\right)\frac{e^{ip'\,|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}, \quad p' = \sqrt{E'^2 - m^2}. \tag{7}$$

Благодаря присутствию поглощающего ядра G, вообще говоря, отличается от G_0 (отличие имеет место в области геометрической тени по отношению к направлению $\mathbf{r}$).

Так как $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ представляет собой поле в точке $\mathbf{r}$, создаваемое единичным источником, находящимся в точке $\mathbf{r}'$, то, используя (2) и (7), можно представить G в виде

$$G = G_0 + G_1,$$

$$G_1 = -\frac{1}{(4\pi)^2}\left(\vec{\gamma}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} - \gamma_4 E' - m\right)\vec{\gamma}\mathbf{n}\left(-\vec{\gamma}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'} - \gamma_4 E' - m\right) \times \\ \times \int\limits_S \frac{e^{ip'|\mathbf{r}''-\mathbf{r}|}}{|\mathbf{r}''-\mathbf{r}|}\frac{e^{ip'|\mathbf{r}''-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}''-\mathbf{r}'|}d^2r'', \tag{8}$$

где $\mathbf{n} = \dfrac{\mathbf{r}'-\mathbf{r}}{|\mathbf{r}'-\mathbf{r}|}$ и интегрирование совершается по площади круга радиуса R (см. рис. 1; ср. [1]).

Замечая, что G_1 отлично от нуля только в области геометрической тени по отношению к направлению $\mathbf{r}$, где Φ_0 совпадает с плоской волной $e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}'}u_\mathbf{p}$, и что член $u_\mathbf{p}e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}'}G_0$ не дает в силу законов сохранения вклада в (6), получим следующее выражение для $\Phi(\mathbf{r})$ при $r \to \infty$:

$$\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{ie}{\sqrt{2\omega}}\frac{e^{ip'r}}{(4\pi)^2 r}(i\vec{\gamma}\mathbf{p}' - \gamma_4 E' - m)\Big\{(\mathbf{e}\vec{\gamma})\int\Big[\left(\vec{\gamma}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'} - \gamma_4 E - m\right) \times \\ \times \int\limits_S \frac{e^{ip|\mathbf{r}'-\mathbf{r}''|}}{|\mathbf{r}'-\mathbf{r}''|}\frac{\vec{\gamma}\mathbf{p}}{p}u_\mathbf{p}\,d^2r''e^{-i(\mathbf{k}+\mathbf{p}')\mathbf{r}'}\Big]d^3r'\Big\} + \\ + \frac{\vec{\gamma}\mathbf{p}'}{p'}\int\Big[\left(-\vec{\gamma}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'} - \gamma_4 E' - m\right)\int\limits_S \frac{e^{ip'|\mathbf{r}''-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}''-\mathbf{r}'|}d^2r''\mathbf{e}\vec{\gamma}u_\mathbf{p}e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{p})\mathbf{r}'}\Big]d^3r', \tag{9}$$

где $\mathbf{p}' = p'\dfrac{\mathbf{r}}{r}$. Для малых углов θ' и θ между $\mathbf{p}'$ и $\mathbf{p}$ и $\mathbf{k}$ и $\mathbf{p}$, для которых только и имеет смысл диффракционное рассмотрение, (9) приобретает вид

$$\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{ie}{\sqrt{2\omega}}\frac{e^{ip'r}}{4r}\frac{RJ_1(R|k\vec{\theta} + p'\vec{\theta}'|)}{|k\vec{\theta} + p'\vec{\theta}'|}(i\vec{\gamma}\mathbf{p}' - \gamma_4 E' - m) \times \\ \times\left[\frac{\mathbf{e}\vec{\gamma}\,(i\vec{\gamma}\,(\mathbf{p}'+\mathbf{k}) - \gamma_4 E - m)\,\vec{\gamma}\mathbf{p}}{p^2(|\mathbf{p}'+\mathbf{k}| - p)} + \frac{\vec{\gamma}\mathbf{p}'\,(i\vec{\gamma}\,(\mathbf{p}-\mathbf{k}) - \gamma_4 E' - m)\,\mathbf{e}\vec{\gamma}}{p'^2(|\mathbf{p}-\mathbf{k}| - p')}\right]u_\mathbf{p}. \tag{10}$$

Плотность потока рассеянных частиц равна

$$j = i\bar{\Phi}\frac{\vec{\gamma}\mathbf{p}'}{p'}\Phi_{r=\infty}, \quad \bar{\Phi} = \Phi^*\gamma_4,$$

а сечение процесса $d\sigma$ связано с j соотношением

$$d\sigma = \frac{jr^2}{v}do'\frac{\omega^2\,d\omega\,do_\gamma}{(2\pi)^3},$$

где v — скорость частиц и $do' \equiv d^2\theta'$ и $do_\gamma \equiv d^2\theta$ — элементы телесных углов, в которых находятся $\mathbf{p}'$ и $\mathbf{k}$.

В области малых θ и θ' при $E \gg m$ $d\sigma$ равно:

$$d\sigma = \frac{e^2}{4\pi^3}\frac{p'}{p}\frac{R^2 J_1(mR|\vec{\xi}+\vec{\eta}|)}{|\vec{\xi}+\vec{\eta}|^2}\frac{d\omega}{\omega}d^2\xi\,d^2\eta \times \\ \times\left\{\left(\frac{\vec{\xi}}{1+\xi^2} + \frac{\vec{\eta}}{1+\eta^2}\right)^2 + \frac{\omega^2}{2pp'}\frac{(\vec{\xi}+\vec{\eta})^2}{(1+\xi^2)(1+\eta^2)}\right\}, \tag{11}$$

где $\vec{\xi} = \dfrac{p}{m}\vec{\theta}$, $\vec{\eta} = \dfrac{p'}{m}(\vec{\theta}' - \vec{\theta})$.

Первое слагаемое в фигурных скобках дает найденное Л. Ландау и И. Померанчуком сечение диффракционного излучения для частиц без спина, а второе обусловлено наличием спина частицы. Мы видим, что влияние спина сказывается только в области больших частот. Однако при этом частицу, строго говоря, уже нельзя рассматривать как точечный заряд и необходимо учитывать ее „размазанность", обусловленную взаимодействием частицы с мезонным вакуумом. Влияние размеров частицы приводит в некоторых условиях к появлению форм-фактора F, зависящего от инвариантной частоты $(E\omega - \mathbf{pk})/m$. Частицу можно рассматривать как точечную, если $(E\omega - pk)/m\mu \ll 1$, т. е. если $\omega \ll E\frac{\mu}{m}$ *. С учетом форм-фактора выражение (11) должно быть умножено на $|F|^2$.

Интегрирование (11) (без множителя $|F|^2$) по углам дает

$$d\sigma_\omega = d\sigma_\omega^0 + \frac{e^2}{\pi}\frac{\omega\, d\omega}{p^2} R^2 C(mR);$$

$$C(mR) = \int\limits_0^\infty \frac{J_1^2(2mRx)}{\sqrt{1+x^2}} \ln\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}-x}\, dx,$$

где $d\sigma_\omega^0$ — проинтегрированное по углам сечение излучения для частицы без спина.

При применении этих формул к протону необходимо иметь в виду, что в этом случае имеют смысл только малые $|\vec{\xi} + \vec{\eta}|$ и интегрирование по всем углам здесь незаконно. Действительно, граница ядра „размазана" и ее „диффузность" составляет по порядку величины $\Delta R \sim 1/\mu$ (μ — масса мезона). Поэтому диффракционное рассмотрение в случае протона имеет смысл только для таких значений аргумента бесселевой функции J_1, для которых $m\Delta R|\vec{\xi} + \vec{\eta}| \ll 1$, т. е. для $|\vec{\xi} + \vec{\eta}| \ll \mu/m < 1$**.

5. Мы считали ядро абсолютно черным. „Серость ядра" может быть приближенно учтена введением под знаком интеграла в выражениях для G_1 и диффрагированной волны (4) множителя $1 - e^{-(K-2ik_1)q}$, где q — путь, проходимый волной в ядре, K и k_1 — коэффициенты поглощения и изменения фазы (ср. ([2])). При этом множитель $\frac{RJ_1(mR|\vec{\xi} + \vec{\eta}|)}{|\vec{\xi} + \vec{\eta}|}$ в (11) заменится выражением

$$R^2 m \int\limits_0^\infty (1 - e^{-2(K-2ik_1)R\sqrt{1-z^2}}) J_0(mR|\vec{\xi} + \vec{\eta}|z)\, z\, dz\,.$$

В заключение выражаю благодарность проф. И. Померанчуку, обратившему мое внимание на рассмотренный здесь вопрос, за ценные дискуссии, а также С. Пелетминскому за помощь при выполнении вычислений.

Поступило
18 VI 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. Ландау, И. Померанчук, ЖЭТФ, 24, 505 (1953). S. Fernbach, R. Serber, T. B. Taylor, Phys. Rev., 75, № 9, 1352 (1949).

* Мы считаем, что размеры частицы порядка $1/\mu$.
** Это замечание принадлежит И. Я. Померанчуку.