Доклады Академии Наук СССР
1954. Том XCV, № 1

МАТЕМАТИКА

А. И. СКОПИН

p-РАСШИРЕНИЯ ЛОКАЛЬНОГО ПОЛЯ, СОДЕРЖАЩЕГО $\sqrt[p^M]{1}$

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 29 XII 1953)

§ 1. В работе изучаются p-расширения локального поля, содержащего корень p-й степени из единицы при нечетном p. Случай расширений локального поля, не содержащего корня p-й степени из единицы, разобран И. Р. Шафаревичем ([1]). Основные положения являются общими для обоих случаев. Приведем эти положения.

Будут употребляться следующие обозначения. Если G — группа, то G^p — ее подгруппа, порожденная p-ми степенями всех элементов группы G. Если H — подгруппа G, то $[G, H]$ — подгруппа G, порожденная всеми коммутаторами вида $g \circ h = ghg^{-1}h^{-1}$, где $g \in G$, $h \in H$. Если G — группа, то $G^{(m)} = (G^{(m-1)})^p [G^{(m-1)}, G^{(m-1)}]$ и $G^{(0)} = G$. Группа называется m-ступенной, если $G^{(m)} = 1$, но $G^{(m-1)} \neq 1$.

Если k — локальное поле, то k_m — композит всех циклических расширений p-й степени поля k_{m-1} и $k_0 = k$. Если k — поле, то k^* — его мультипликативная группа. Поле K называется m-ступенным расширением k, если оно нормально над k и группа K над k m-ступенна.

Пусть k_0 — локальное поле абсолютной степени n_0. Обозначим группу k_m над k_0 через G_m. Имеют место следующие факты ([1],[2]).

1. Группа G_m имеет такое же число образующих, как G_1, а именно $\nu = n_0 + 1$ в случае, когда k_0 не содержит корня p-й степени из единицы, и $\nu = n_0 + 2$ в случае, когда k_0 содержит такой корень.

2. Поле k_m является m-ступенным расширением k_0 и содержит любое другое m-ступенное расширение k_0.

Возьмем свободную группу S с ν образующими. На основании вышеизложенного G_m может быть представлена в следующем виде: $G_m = S/H$, где $H \supset S^{(m)}$, ибо $G_m^{(m)} = 1$. Если k_0 не содержит корня p-й степени из единицы, то подсчет индексов $(S:H)$ и $(S:S^{(m)})$ показывает, что $H = S^{(m)}$ ([1]). В данной работе находится H для случая, когда k_0 содержит корни p^M-й степени из единицы. При этом оказалось (§ 6), что если F—группа с образующими $a_1, \ldots, a_\nu$ и единственным соотношением

$$(a_1 \circ a_2)(a_3 \circ a_4)\ldots(a_{\nu-1} \circ a_\nu) = 1, \tag{1}$$

то для $m \leqslant M$ группа G_m представляется в виде $G_m = F/F^{(m)}$. Отсюда получается основная теорема.

Теорема. *Если k_0 содержит корни p^M-й степени из единицы, то всякая m-ступенная p-группа при $m \leqslant M$ тогда и только тогда является группой расширения поля k_0, когда она имеет ν образующих, связанных соотношением* (1).

§ 2. Связь свободной группы с фактор-системами. Пусть имеется конечная p-группа G_1, минимальное число образующих которой равно ν. Тогда, если S — свободная группа с ν образующими, то $G_1 = S/H_1$. Рассмотрим нормальный делитель $H_2 = H_1^p[H_1, S]$ группы S. Группа $G_2 = S/H_2$ является расширением своего нормального делителя $A = H_1/H_2$ при фактор-группе G_1 и некоторых факторах a_{σ_1, σ_2} $(\sigma_1, \sigma_2 \in G_1)$. A — элементарная абелева группа. Пусть X — группа характеров для A. Возьмем $\chi \in X$ с ядром A_χ. Группа $G_\chi = G_2/A_\chi$ является центральным расширением $Z_\chi = A/A_\chi$ при фактор-группе G_1 и факторах $z^\chi_{\sigma_1, \sigma_2}$. Обозначим через $\theta(\chi)$ автоморфизм группы E корней p-й степени из единицы на Z_χ. Тогда $z^\chi_{\sigma_1, \sigma_2} = (\chi(a_{\sigma_1, \sigma_2}))^{\theta(\chi)}$. Обозначим $\chi(a_{\sigma_1, \sigma_2})$ через $\varepsilon^\chi_{\sigma_1, \sigma_2}$. Группа классов ассоциированных в E фактор-систем обозначим через B.

Теорема 1. *Соответствие $\chi \to \varepsilon^\chi_{\sigma_1, \sigma_2}$ является изоморфизмом X на B.*

§ 3. Подгруппа фундаментальной группы. В дальнейшем используются некоторые факты из теории поверхностей. Известно, что ориентируемая поверхность эйлеровой характеристики N имеет род $h = \frac{2-N}{2}$, и ее фундаментальная группа F имеет $2h$ образующих $a_1, \ldots, a_{2h}$, связанных единственным соотношением $(a_1 \circ a_2) \ldots (a_{2h-1} \circ a_{2h}) = 1$. Возьмем подгруппу H группы F индекса i. Можно построить поверхность, для которой фундаментальная группа изоморфна H [3]. При этом эйлерова характеристика увеличится в i раз. Отсюда получаем теорему:

Теорема 2. *Подгруппа индекса i фундаментальной группы с $2h$ образующими является фундаментальной группой с $2h_i$ образующими, где $2h_i = i(2h-2)+2$.*

§ 4. Об одном классе p-групп. Составим для конечной p-группы $\mathfrak{P}$ с четным числом образующих a_i $(1 \leqslant i \leqslant 2\nu)$ убывающий центральный ряд по следующему закону: $\mathfrak{P}_0 = \mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}_{i+1} = \mathfrak{P}_i^p[\mathfrak{P}_i, \mathfrak{P}]$. Группа $\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{P}^p[\mathfrak{P}, \mathfrak{P}]$ является группой Фраттини для $\mathfrak{P}$ и будет обозначаться через Φ. Пусть, кроме того, $\Phi_1 = [\Phi, \mathfrak{P}]$.

Теорема 3. *Если в $\mathfrak{P}$ выполняется соотношение $(a_1 \circ a_2) \ldots (a_{\nu-1} \circ a_\nu) = \rho \in \Phi_1$, то найдутся другие образующие a_i' $(1 \leqslant i \leqslant 2\nu)$ группы $\mathfrak{P}$, в которых выполняется соотношение $(a_1' \circ a_2') \ldots (a_{2\nu-1}' \circ a_{2\nu}') = 1$, т. е. $\mathfrak{P}$ является гомоморфным образом фундаментальной группы.*

§ 5. Второй центральный шаг. Рассмотрим локальное поле k_0 абсолютной степени n_0, содержащее корень p-й степени из единицы. Построим над определенным в § 1 одноступенным расширением k_1 композит $\overline{k}_2$ всех центральных циклических расширений k_1 степени p. Группа G_1 поля k_1 есть элементарная абелева группа с $\nu = n_0 + 2$ образующими. Группу $\overline{k}_2$ над k_0 обозначим через $\overline{G}_2$. В настоящем параграфе определяется $\overline{G}_2$.

Выберем базис в $k_0^*/(k_0^*)^p$, и пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_\nu$ — числа, принадлежащие базисным классам. Считаем, что $\alpha_1 = \varepsilon$. Образующие автоморфизмы k_1, соответствующие $\sqrt[p]{\alpha_i}$, обозначим через $\overline{a}_i$, а их фиксированные продолжения в $\overline{k}_2$ через a_i.

Пусть S — свободная группа с ν образующими, $G_1 = S/H_1$, $H_2 = H_1^p[H_1, S]$, $G_2 = S/H_2$. Тогда $\overline{G}_2 = G_2/N$, и N лежит в центре G_2. Задача заключается в нахождении N, т. е. нетривиальных соотношений в центре $A = H_1/H_2$ группы G_2.

Каждое центральное циклическое расширение $k_1(\sqrt[p]{x})$ имеет над k_0

группу G_x, являющуюся центральным расширением группы Z_x порядка p посредством G_1 и факторов $z^x_{\sigma_1,\sigma_2}$. При отображении Z_x на E образы $z^x_{\sigma_1,\sigma_2}$ заполняют некоторое подмножество B_x группы B (см. § 2). Обозначим совокупность классов фактор-систем $\varepsilon_{\sigma_1,\sigma_2}$ из B, состоящих из ассоциированных с единичной в поле k_1, т. е. представимых в виде $\varepsilon_{\sigma_1,\sigma_2} = \frac{y^{\sigma_2}_{\sigma_1} y_{\sigma_2}}{y_{\sigma_1\sigma_2}}$, где $y_\sigma \in k_1$, через B_k. Можно доказать, что $B_k = B_x$.

Фактор-система $\varepsilon^{\chi}_{\sigma_1,\sigma_2}$, представляющая произвольный класс из B (см. теорему 1), тогда и только тогда принадлежит B_k, когда скрещенное произведение $(k_1, \varepsilon^{\chi}_{\sigma_1,\sigma_2})$ является матричной алгеброй. Чтобы подсчитать инвариант алгебры $(k_1, \varepsilon^{\chi}_{\sigma_1,\sigma_2})$ разложим ее в прямое произведение на основании теоремы 1: $(k_1, \varepsilon^{\chi}_{\sigma_1,\sigma_2}) = \prod_i (k_1, \varepsilon^{\chi_i}_{\sigma_1,\sigma_2})^{\xi_i} \prod_{j,k} (k_1, \varepsilon^{\chi_{j,k}}_{\sigma_1,\sigma_2})^{\xi_{j,k}}$, если $\chi = \prod_i \chi_i^{\xi_i} \prod_{j,k} \chi_{j,k}^{\xi_{j,k}}$, где χ_i и $\chi_{j,k}$ — базисные характеры, соответствующие образующим a_i^p и $a_j \circ a_k$ группы A.

Вычисляя, убеждаемся, что алгебра $(k_1, \varepsilon^{\chi_i}_{\sigma_1,\sigma_2})$ подобна циклической $(k_0(\sqrt[p]{\alpha_i}), \varepsilon)$, а алгебра $(k_1, \varepsilon^{\chi_{j,k}}_{\sigma_1,\sigma_2})$ подобна циклической $(k_0(\sqrt[p]{\alpha_k}), \alpha_j)$.

Инвариант алгебры $k_0(u, v)$ с таблицей умножения $v^p = \alpha$, $u^p = \beta$, $u \circ v = \varepsilon$ обозначим символом (α, β). При помощи этого символа результат подсчета инвариантов можно записать так:

$$(k_1, \varepsilon^{\chi}_{\sigma_1,\sigma_2}) = \prod_i (\alpha_i, \varepsilon)^{\xi_i} \prod_{j,k} (\alpha_k, \alpha_j)^{\xi_{j,k}},$$

применяя для инварианта алгебры такое же обозначение, как и для самой алгебры. После этого легко найти N. Пусть $(\alpha_i, \varepsilon) = \varepsilon^{\mu_i}$, $(\alpha_k, \alpha_j) = \varepsilon^{\mu_{j,k}}$, тогда N оказывается циклической группой с образующим $\prod_i (a_i^p)^{\mu_i} \prod_{j,k} (a_j \circ a_k)^{\mu_{j,k}}$.

В k_0^* можно выбрать базис $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_{\nu/2}, \beta_{\nu/2}$ по модулю $(k_0^*)^p$, удовлетворяющий следующим условиям: $(\alpha_i, \beta_i) = \varepsilon$, $(\alpha_i, \alpha_j) = (\alpha_i, \beta_j) = (\beta_i, \beta_j) = 1$ при $i \neq j$. При таком выборе базиса соотношение в $\overline{G}_2$ принимает наиболее простой вид. Обозначим автоморфизмы $\overline{k}_2$, соответствующие базисным элементам, через a_i и b_i.

Теорема 4. *Если k_0 содержит корень p-й степени из единицы, но не содержит корня p^2-й степени из единицы, то группа $\overline{G}_2$ имеет образующие, связанные единственным нетривиальным соотношением:*

$$b_1^p (a_1 \circ b_1) \ldots (a_{\nu/2} \circ b_{\nu/2}) = 1.$$

Если же ε является p-й степенью в k_0, то все $\mu_i = 0$, и соотношение принимает совсем простой вид.

Теорема 4'. *Если k_0 содержит корень p^2-й степени из единицы, то $\overline{G}_2$ имеет образующие, в которых выполняется единственное нетривиальное соотношение:*

$$(a_1 \circ b_1) \ldots (a_{\nu/2} \circ b_{\nu/2}) = 1, \qquad (2)$$

т. е. $\overline{G}_2$ является гомоморфным образом фундаментальной группы.

§ 6. Группа поля k_m в случае, когда $\sqrt[p^M]{1} \subset k_0$. Пусть k_0 содержит корень p^M-й степени из единицы. Возьмем $m \leqslant M$ и рассмо-

трим последовательность полей $k_0 \subset \bar{k}_2 \subset \bar{k}_m \subset k_m$, $\bar{k}_m = \bar{k}_2(\sqrt[p^m]{\alpha_1}, \sqrt[p^m]{\beta_1}, \ldots$
$\ldots, \sqrt[p^m]{\alpha_{\nu/2}}, \sqrt[p^m]{\beta_{\nu/2}})$, k_m — максимальное m-ступенное расширение k_0, определенное в § 1. Группу $\bar{k}_m$ обозначим через $\bar{G}_m$, группу k_m через $G_m = \mathfrak{P}$. Пусть $\Phi_1 = [\Phi, \mathfrak{P}]$, где $\Phi = \mathfrak{P}^p [\mathfrak{P}, \mathfrak{P}]$ — группа Фраттини $\mathfrak{P}$. За образующие G_m поля k_m можно выбрать такие автоморфизмы $a_1, b_1, \ldots, a_{\nu/2}, b_{\nu/2}$, которые продолжают образующие поля $\bar{k}_2$, связанные соотношением (2). Нетрудно видеть, что эти образующие можно выбрать так, чтобы автоморфизм $(a_1 \circ b_1) \ldots (a_{\nu/2} \circ b_{\nu/2})$ не изменял элементов из $\bar{k}_m$. Далее можно доказать, что подполе $\bar{k}_m$ поля k_m принадлежит Φ_1, т. е. в $\mathfrak{P}$ выполняется соотношение $(a_1 \circ b_1) \ldots (a_{\nu/2} \circ b_{\nu/2}) = \rho \in \Phi_1$. Применяя теорему 6, получаем, что $\mathfrak{P}$ является гомоморфным образом фундаментальной группы F с ν образующими, т. е. $\mathfrak{P} = F/H$. Вследствие тривиального равенства $\mathfrak{P}^{(m)} = 1$ получаем $H \supset F^{(m)}$.

Теорема 5. $\mathfrak{P} = F / F^{(m)}$.

Достаточно доказать равенство индексов $(F:H) = (F:F^{(m)})$. Допустим, что доказываемое утверждение справедливо для $m-1$, т. е. $(k_{m-1}:k_0) = (F:F^{(m-1)})$. Тогда $(k_m:k_{m-1}) = p^{n_0(k_{m-1}:k_0)+2}$, так как абсолютная степень k_{m-1} равна $n_0(k_{m-1}:k_0)$. Затем, число образующих $F^{(m-1)}$ по теореме 5 равно $(F:F^{(m-1)})(\nu-2)+2 = (F:F^{(m-1)})\,n_0+2$. Таким образом, справедливы равенства

$$(F:H) = (k_m:k_0) = (k_m:k_{m-1})(k_{m-1}:k_0) = p^{n_0(k_{m-1}:k_0)+2}(k_{m-1}:k_0),$$
$$(F:F^{(m)}) = (F:F^{(m-1)})(F^{(m-1)}:F^{(m)}) = (F:F^{(m-1)})\,p^{(F:F^{(m-1)})\,n_0+2}$$

Правые части этих равенств совпадают в силу индукционного предположения, и теорема доказана.

Поступило
28 XII 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. Р. Шафаревич, Матем. сборн., **20** (62): 2 (1947). [2] C. Chevalley, J. Fac. Sci. Imp. Univ. Tokyo, 9 (1933). [3] Г. Зейферт, В. Трельфалль, Топология, 1938.