Доклады Академии Наук СССР
1954. Том XCV, № 1

МАТЕМАТИКА

В. В. РЫЖКОВ

ОБ ОДНОМ ПРЕОБРАЗОВАНИИ ПАРЫ НАЛОЖИМЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

(Представлено академиком П. С. Александровым 15 XII 1953)

В настоящем сообщении рассматривается некоторое преобразование пары метрически наложимых n-мерных поверхностей евклидова R_N, выполнимое чисто алгебраическим путем; преобразование это, называемое нами квазиподобным, сохраняет порядок метрической наложимости данных поверхностей. Кроме того вводится тесно с ним связанное преобразование, переводящее пары наложимых поверхностей из R_N в пары поверхностей из R_{N+1}, допускающих наложение в группе вращений с фиксированным центром.

п. 1. Пусть в евклидовом R_N заданы два положения ортогонального репера T' и T'' (не исключаются равные, но неконгруентные реперы); с ними естественно связываются два совмещенные пространства R'_N и R''_N, точечное соответствие между которыми устанавливается движением (1-го или 2-го рода), переводящим репер T' в репер T''. Будем определять положение соответственных точек M' и M'' пространств R'_N и R''_N их радиус-векторами $\overrightarrow{OM'} = \mathbf{x}$ и $\overrightarrow{OM''} = \mathbf{y}$, где O — фиксированная точка R_N. Тогда движение L, переводящее R'_N в R''_N, представится как соответствие $\mathbf{x} \to \mathbf{y} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$, где A — ортогональная матрица первого или второго рода.

Сопоставим теперь паре точек $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ пару точек $\vec{\xi}$, $\vec{\eta}$

$$\vec{\xi} = k\mathbf{x}, \quad \vec{\eta} = k\mathbf{y}. \tag{1}$$

При постоянном k такое преобразование будет преобразованием подобия; будем полагать, что k может изменяться с изменением пары точек, подвергаемых преобразованию. Пусть Δ — знак приращения, отвечающий переходу от пары точек $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ к паре точек $\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}$, $\mathbf{y} + \Delta\mathbf{y}$. Для приращений $\Delta\vec{\xi}$ и $\Delta\vec{\eta}$ мы получим: $\Delta\vec{\xi} = (k + \Delta k)\,\Delta\mathbf{x} + \Delta k\mathbf{x}$, $\Delta\vec{\eta} = (k + \Delta k)\,\Delta\mathbf{y} + \Delta k\mathbf{y}$. Вычисляем выражение $\Delta\vec{\xi}^2 - \Delta\vec{\eta}^2$, для которого после некоторых преобразований находим

$$\Delta\vec{\xi}^2 - \Delta\vec{\eta}^2 = k(k + \Delta k)\{\Delta\mathbf{x}^2 - \Delta\mathbf{y}^2\} + \Delta k \cdot \Delta\{k(\mathbf{x}^2 - \mathbf{y}^2)\}. \tag{2}$$

При получении соотношения (2) мы не пользуемся еще изометрическим характером соответствия между R'_N и R''_N, в силу которого $\Delta\mathbf{x}^2 - \Delta\mathbf{y}^2 = 0$, и, следовательно, (2) переходит в

$$\Delta\vec{\xi}^2 - \Delta\vec{\eta}^2 = \Delta k \cdot \Delta\{k(\mathbf{x}^2 - \mathbf{y}^2)\}. \tag{3}$$

Если мы потребуем теперь, чтобы изометрическое соответствие $\mathbf{x} \to \mathbf{y}$ преобразовалось в изометрическое же соответствие $\vec{\xi} \to \vec{\eta}$, то, исключая подобное преобразование $\Delta k = 0$, $k = \text{const}$, мы должны будем полагать

$$k = \frac{c}{\mathbf{x}^2 - \mathbf{y}^2}; \quad \vec{\xi} = \frac{c\mathbf{x}}{\mathbf{x}^2 - \mathbf{y}^2}, \quad \vec{\eta} = \frac{c\mathbf{y}}{\mathbf{x}^2 - \mathbf{y}^2}. \tag{4}$$

Такое преобразование, определенное всюду, за исключением тех пар точек, где $\mathbf{x}^2 - \mathbf{y}^2 = 0$, мы называем квазиподобным преобразованием. Таким образом, имеет место:

Теорема 1. *Единственное преобразование вида $\vec{\xi} = k\mathbf{x}$, $\vec{\eta} = k\mathbf{y}$, сохраняющее изометрию преобразуемой пары пространств (также каких-либо равных геометрических образов), есть, кроме подобного, квазиподобное преобразование* (4).

Укажем на некоторые свойства квазиподобного преобразования.

Теорема 2. *Квазиподобное преобразование обладает свойством взаимности.*

Теорема 3. *Квазиподобное преобразование пары изометрических пространств представляет для каждого из них в отдельности преобразование гомологии.*

Если теперь применить квазиподобное преобразование к паре метрически наложимых до порядка m (но вообще уже не равных) поверхностей $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u_i)$, $\mathbf{y} = \mathbf{y}(u_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$,

$$\vec{\xi} = \frac{c\mathbf{x}}{\mathbf{x}^2 - \mathbf{y}^2}, \quad \vec{\eta} = \frac{c\mathbf{y}}{\mathbf{x}^2 - \mathbf{y}^2}, \tag{5}$$

то, учитывая, что требование метрической наложимости порядка m для пары аналитически параметризованных поверхностей означает, что выражение $\Delta\mathbf{x}^2 - \Delta\mathbf{y}^2$ исчезает с точностью до величин порядка $2m + 1$ относительно du_i, мы из (2) найдем (следующие теоремы носят локальный характер и предполагают аналитичность поверхностей):

Теорема 4. *Квазиподобное преобразование переводит пару поверхностей, наложимых до порядка m, в пару поверхностей, наложимых до того же порядка.*

Следует отметить, что теперь квазиподобное преобразование уже не сводится к гомологии, так как движение, совмещающее $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, меняется с изменением пары точек $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$.

п. 2. Приведем некоторые результаты, относящиеся к поведению соответствующих сопряженных направлений на налагающихся поверхностях при квазиподобном преобразовании последних.

Теорема 5. *Если некоторые p-направление и q-направление сопряжены на поверхностях $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, допускающих метрическое наложение, то соответствующие направления сопряжены и на квазиподобно преобразованной паре поверхностей.*

Теорема 6. *Если многообразия u сопряжены с многообразиями v на паре налагающихся поверхностей $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u_i;\ v_k)$, $\mathbf{y} = \mathbf{y}(u_i;\ v_k)$, то эти многообразия сопряжены и на преобразованных квазиподобно поверхностях $\vec{\xi}$, $\vec{\eta}$.*

Некоторые типы сопряженных систем, соответствующих на налагающихся поверхностях, инвариантны относительно квазиподобного преобразования. Так, имеет место:

Теорема 7. *Пара наложимых поверхностей* *

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{U}_1(u_i) + \mathbf{V}_1(v_k)}{\varphi(u_i) + \psi(v_k)}, \quad \mathbf{y} = \frac{\mathbf{U}_2(u_i) + \mathbf{V}_2(v_k)}{\varphi(u_i) + \psi(v_k)},$$

$$i = 1, 2, \ldots, p; \quad k = p + 1, \ldots, n,$$

с соответствующей на них конической системой переходит при

* Равенство знаменателей в выражениях $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ есть следствие наложимости $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$.

квазиподобном преобразовании в пару налагающихся поверхностей с соответствующей конической системой.

Могут быть высказаны также утверждения, касающиеся поведения трансформаций Лапласа при квазиподобном преобразовании пары налагающихся поверхностей с соответствующей на них сопряженной сетью; например, справедлива теорема:

Теорема 8. *Если на паре налагающихся поверхностей* $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u_1, u_2)$, $\mathbf{y} = \mathbf{y}(u_1, u_2)$ *соответствует сопряженная сеть* u_1, u_2, *то трансформации Лапласа* $\mathbf{X}_i$ *и* $\mathbf{Y}_i$ *в сторону линий* u_i *переходят при квазиподобном преобразовании* $\mathbf{X}_i$, $\mathbf{Y}_i$ *в соответствующие трансформации Лапласа для квазиподобно преобразованных поверхностей* $\vec{\xi}$, $\vec{\eta}$: *если* $\xi = \frac{c\mathbf{x}}{\mathbf{x}^2 - \mathbf{y}^2}$, $\vec{\eta} = \frac{c\mathbf{y}}{\mathbf{x}^2 - \mathbf{y}^2}$, *то*

$$\vec{\Xi}_i = \frac{c\mathbf{X}_i}{\mathbf{X}_i^2 - \mathbf{Y}_i^2}, \quad \vec{\mathrm{H}}_i = \frac{c\mathbf{Y}_i}{\mathbf{X}_i^2 - \mathbf{Y}_i^2}, \quad i = 1, 2.$$

Во всех рассмотренных случаях исключительными являлись такие пары точек налагающихся поверхностей, для которых $\mathbf{x}^2 - \mathbf{y}^2 = 0$. Если бы равенство $\mathbf{x}^2 - \mathbf{y}^2 = 0$ имело место тождественно, то квазиподобное преобразование такой пары поверхностей стало бы невозможным. Случай этот может быть охарактеризован тем, что наложение поверхностей $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ достигается не в общей группе движений, а в группе вращений с центром O, относительно которого и становится невозможным квазиподобное преобразование. Мы приводим некоторые результаты, касающиеся этого случая.

п. 3. Условимся через $\hat{\mathbf{a}}$ обозначать вектор в R_{N+1} и писать $\hat{\mathbf{a}} = \{\mathbf{a}, a_{n+1}\}$. Тогда может быть высказана

Теорема 9. *Если* $\mathbf{x}$ *и* $\mathbf{y}$ *наложимы в* R_N *до порядка* m, *то поверхности*

$$\vec{\hat{\xi}} = \left\{\lambda\mathbf{x}, \frac{c\lambda}{2} - \frac{\lambda}{2c}(\mathbf{x}^2 - \mathbf{y}^2)\right\}, \quad \vec{\hat{\eta}} = \left\{\lambda\mathbf{y}, \frac{c\lambda}{2} + \frac{\lambda}{2c}(\mathbf{x}^2 - \mathbf{y}^2)\right\} \tag{6}$$

при любой функции $\lambda = \lambda(u_i)$ *допускают наложение того же порядка в группе вращений* R_{N+1} *с центром* $(\mathbf{O}, 0)$.

Доказательство получается путем проверки равенств

$$\vec{\hat{\xi}}^2 = \vec{\hat{\eta}}^2; \quad \Delta\vec{\hat{\xi}}^2 - \Delta\vec{\hat{\eta}}^2 = \lambda(\lambda + \Delta\lambda)\{\Delta\mathbf{x}^2 - \Delta\mathbf{y}^2\}.$$

Указанным путем получаются все пары поверхностей из R_{N+1}, наложимые в группе вращений с заданным центром. Возможно и обратное преобразование:

Теорема 10. *Если поверхности* $\vec{\hat{\xi}} = (\vec{\xi}, \xi_{n+1})$, $\vec{\hat{\eta}} = (\vec{\eta}, \eta_{n+1})$ *наложимы до порядка* m *в группе вращений* R_{N+1} *с центром* $(\mathbf{O}, 0)$, *то поверхности*

$$\mathbf{x} = \frac{\vec{\xi}}{\xi_{n+1} \pm \eta_{n+1}}, \quad \mathbf{y} = \frac{\vec{\eta}}{\xi_{n+1} \pm \eta_{n+1}} \tag{7}$$

из R_N *допускают метрическое наложение того же порядка.*

Пары поверхностей, получаемых при выборе верхнего или нижнего знака, суть, соответственно, квазиподобные преобразования друг друга.

При помощи преобразования теоремы 9 задача о налагающихся парах поверхностей с соответствующей на них конической системой сводится к задаче о парах поверхностей переноса, налагающихся в группе вращений.

Поступило
8 XII 1953