

И. Ш. ПИНСКЕР

**К ВОПРОСУ О ПОСТРОЕНИИ ФУНКЦИИ, НАИМЕНЕЕ
УКЛОНЯЮЩЕЙСЯ ОТ НУЛЯ**

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 9 I 1954)

Настоящая работа посвящена прежде всего указанию и обоснованию численного метода построения функции многих переменных, наименее уклоняющейся от нуля.

Рассмотрим множество непрерывных функций $\{\Delta(x)\}$, принимающих действительные значения в точках компакта G .

О множестве $\{\Delta(x)\}$ будем говорить, что оно является интерполяционным классом размерности n и записывать его в виде $\Omega_n(G)$ или просто Ω_n , если:

1) в множестве M_n , элементами которого $m_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ являются совокупности из n различных произвольных точек компакта G , определено непустое подмножество A_n ; если $m_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \in A_n$, то множество H_n , состоящее из точек x_1, x_2, \dots, x_n , будем называть невырождающимся множеством;

2) для любого невырождающегося множества $H_n \subset G$, состоящего из точек $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$: а) при любых n действительных числах $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ существует одна и только одна функция $\Delta^0(x)$ класса Ω_n , принимающая эти значения в соответствующих точках множества H_n ; б) при любых $\varepsilon > 0$, функции $\Delta^0(x) \in \Omega_n$ и точке $x^0 \in G$ всегда можно найти такое $\gamma^0 > 0$, для которого из неравенств

$$\rho(x^0, x') < \gamma^0, \quad \max_i \rho(x_i^0, x_i) < \gamma^0, \quad \max_i |\Delta^0(x_i^0) - \Delta(x_i)| < \gamma^0,$$

где $x' \in G$, $\Delta(x) \in \Omega_n$, а (x_1, x_2, \dots, x_n) — невырождающееся подмножество компакта G , следует что $|\Delta^0(x^0) - \Delta(x')| < \varepsilon$.

Укажем примеры интерполяционных классов.

Пример 1. Пусть на отрезке $[-1, +1]$ определены непрерывные функции $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$, образующие на этом отрезке систему Чебышева (по терминологии С. Н. Бернштейна⁽¹⁾). Рассмотрим семейство функций вида

$$y = \varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \dots + a_n\varphi_n(x), \quad (1)$$

где $\varphi_0(x)$ — непрерывная функция, определенная на отрезке $[-1, +1]$ и a_1, \dots, a_n — любые действительные числа. Поскольку в плоскости (x, y) через n точек полосы, ограниченной линиями $x = \pm 1$, всегда проходит одна и только одна функция семейства (1), положим $A_n = M_n$. Теперь семейство (1) образует интерполяционный класс.

Пример 2. Рассмотрим на круге $\pi: \xi^2 + \eta^2 \leq 1$ при любых действительных числах a_1 и a_2 семейство функций

$$a_1\xi^2 + a_2(\xi + \eta) + (\xi^2 - \eta^2 - \eta). \quad (2)$$

Если считать, что множество A_2 состоит из таких совокупностей $\{(\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2)\}$ пар точек круга π , для которых не равен нулю детерминант

$$\begin{vmatrix} (\xi_1)^2 & \xi_1 + \eta_1 \\ (\xi_2)^2 & \xi_2 + \eta_2 \end{vmatrix},$$

то семейство функций (2) образует интерполяционный класс $\Omega_2(\pi)$ размерности 2.

Определение 1. Уклонением функции $\Delta(x)$ от нуля на множестве H назовем величину $\sup |\Delta(x)|$ по всем точкам x , принадлежащим множеству H . Функция $\Delta(x)$ класса Ω_n называется наименее уклоняющейся от нуля на множестве $H \subset G$, если ее уклонение от нуля не превосходит уклонения от нуля любой другой функции класса Ω_n .

Теорема 1. Среди функций класса $\Omega_n(G)$ существует функция, наименее уклоняющаяся от нуля на G .

Определение 2. Множество H_l , состоящее из l точек x_1, x_2, \dots, x_l компакта G , назовем невырождающимся, если: а) при $l > n$ его любое подмножество из n точек является невырождающимся; б) при $l < n$ множество H_l можно дополнить $n-l$ точками G и получить невырождающееся множество из n точек.

Определение 3. Невырождающееся множество H_{n+1}^0 , состоящее из $n+1$ точек $(x_0^0, x_1^0, \dots, x_n^0)$ компакта G , образует полный альтернанс для функции $\Delta^0(x) \in \Omega_n$, если это множество точек удовлетворяет одному из двух условий: 1) среди функций класса Ω_n нельзя найти такой функции $\Delta(x)$, для которой уклонение от нуля в каждой из точек множества H_{n+1}^0 меньше соответствующего уклонения функции $\Delta^0(x)$; 2) $\text{sign } \Delta^0(x_i^0) = \text{sign } \Delta_i^0(x_i^0)$ при $i = 0, 1, \dots, n$, считая при этом, что $\Delta_i^0(x)$ — функция класса Ω_n , имеющая своими нулями точки $x_0^0, x_1^0, \dots, x_{i-1}^0, x_{i+1}^0, \dots, x_n^0$.

Оба определения полного альтернанса эквивалентны. Для примера 1 всякое множество H_{n+1} , состоящее из $n+1$ точек отрезка $[-1, +1]$, образует полный альтернанс для функции $\Delta(x)$ класса (1), если эта функция принимает чередующиеся по знаку значения в точках множества H_{n+1} .

Теорема 2. Для невырождающегося множества H_{n+1} , состоящего из $n+1$ точек G , существует одна и только одна функция $\Delta(x)$ класса Ω_n , наименее уклоняющаяся от нуля на множестве H_{n+1} . Для этой функции множество H_{n+1} образует полный альтернанс, в точках которого функция $\Delta(x)$ принимает равные по модулю значения.

Теорема 3. Если в невырождающемся множестве $(x_0, x_1, \dots, x_{n+1})$, состоящем из $n+2$ точек компакта G , первые $n+1$ точек образуют полный альтернанс для функции $\Delta(x)$ класса Ω_n , то одну из этих $n+1$ точек можно заменить точкой x_{n+1} , сохраняя при этом полный альтернанс.

Перейдем теперь к численному методу построения функции, наименее уклоняющейся от нуля.

Определение 4. Назовем приближенной (Δ) -последовательностью такую последовательность $\Delta^1(x), \Delta^2(x), \dots, \Delta^k(x), \dots$ функций класса Ω_n , которая удовлетворяет следующим условиям: 1) $\Delta^1(x)$ является функцией, наименее уклоняющейся от нуля на некотором невырождающемся множестве $H_{n+1}^1 = (x_0^1, x_1^1, \dots, x_n^1)$, состоящем из $n+1$ точек G , и при этом $\Delta^1(x)$ не обращается в нуль в точках этого множества; 2) $\Delta^k(x)$ — функция, наименее уклоняющаяся от

нуля на множестве $H_{n+1}^k = (x_0^k, x_1^k, \dots, x_n^k)$, считая при этом, что:
 а) H_{n+1}^k — невырождающееся множество из $n_1^k + 1$ точек компакта G , образующее полный альтернанс для функции $\Delta^{k-1}(x)$; б) $\min_i |\Delta^{k-1}(x_i^k)| + c_k \geq |\Delta^{k-1}(x_j^{k-1})|$; в) $\max_i |\Delta^{k-1}(x_i^k)| + c_k \geq \max_{x \in G} |\Delta^{k-1}(x)|$; г) последовательность неотрицательных чисел $c_1, c_2, \dots, c_k, \dots$ сходится к нулю.

Если числа $c_1, c_2, \dots, c_k, \dots$ равны нулю, приближенную (Δ) -последовательность будем называть точной.

Для формулировки следующего теорема нам понадобятся множества M_l , элементами которых являются совокупности из l различных точек компакта G . Определим расстояние между элементами $m_i^l(x'_1, x'_2, \dots, x'_l)$ и $m_j^l(x''_1, x''_2, \dots, x''_l)$ множества M_l как величину $\min_i \max_j \rho(x'_i, x''_j)$ для $i, j = 1, 2, \dots, l$. Теперь множества M_l становятся метрическими пространствами. Элементы множества M_l , составленные из точек невырождающихся множеств $H_l \subset G$, образуют некоторое подмножество, которое будем обозначать через A_l .

Определение 5. Последовательность $m_{n+1}^1, m_{n+1}^2, \dots, m_{n+1}^k, \dots$ элементов множества A_{n+1} , являющихся совокупностями точек соответствующих множеств H_{n+1}^k определения 4, назовем (m) -последовательностью.

Теорема 4. Если A_{n+1} всюду плотно на множестве M_{n+1} и в классе $\Omega_n(G)$ не существует функции, тождественно равной нулю на G , то возможно построение приближенной (Δ) -последовательности.

Множество A_3 второго примера всюду плотно на M_3 (под M_3 мы подразумеваем множество различных совокупностей троек точек круга π), и поэтому класс $\Omega_2(\pi)$ удовлетворяет условиям теоремы.

Теорема 5. Если подпоследовательность $m_{n+1}^1, m_{n+1}^2, \dots, m_{n+1}^k, \dots$ элементов (m) -последовательности сходится к элементу $m_{n+1} \in A_{n+1}$, то соответствующая подпоследовательность $\Delta^{s_1-1}(x), \Delta^{s_2-1}(x), \dots, \Delta^{s_k-1}(x), \dots$ элементов приближенной (Δ) -последовательности равномерно сходится к функции, являющейся единственной функцией класса Ω_n , наименее уклоняющейся от нуля на G .

Указанное построение (Δ) -последовательности является численным методом построения функции многих переменных, наименее уклоняющейся от нуля. Это построение и теоремы 4—5 обобщают на многомерные пространства построение второго алгоритма Е. Я. Ремеза ⁽³⁾ для функций примера 1 или процесс уравнивания максимумов для интерполяционного класса работы ⁽⁴⁾.

Установим теперь понятие правильного интерполяционного класса, сделав естественные предположения о поведении функций класса $\Omega_n(G)$ на любых подмножествах компакта G . Введем несколько вспомогательных определений.

Определение 6. Целое число $0 \leq r \leq n$ назовем рангом множества $H \subset G$, если в H можно найти невырождающееся подмножество, состоящее из r точек, и нельзя найти невырождающееся подмножество из $r+1$ точек. Если в H существует невырождающееся подмножество из n точек, то будем считать, что ранг H равен n . Ранг G по определению равен n . Точки множества G , в которых все функции класса Ω_n принимают одно и то же значение, назовем стационарными точками. Ранг множества, состоящего из стационарных точек, равен нулю.

Определение 7. Множество $H \subset G$ будем называть независимым, если оно конечно и его ранг равен числу его точек.

Определение 8. Множество из r точек ($1 \leq r \leq n + 1$) назовем зависимым в узком смысле, если оно, так же как и его любое подмножество из $r - 1$ точек, имеет ранг $r - 1$. Множество, состоящее из одной стационарной точки, всегда зависимо в узком смысле.

Определение 9. Интерполяционный класс $\bar{\Omega}_n(G)$ будем называть правильным и обозначать через $\bar{\Omega}_n(G)$ или $\bar{\Omega}_n$, если на любом замкнутом множестве $H \subset G$ ранга r класс $\bar{\Omega}_n$ вырождается в класс $\bar{\Omega}_r(H)$ размерности r . В обоих рассмотренных выше примерах интерполяционные классы являются правильными. Обозначим $\bar{\Omega}_{n-r}^\Delta(G/H) = \bar{\Omega}_{n-r}(G)$ правильный интерполяционный класс, состоящий из функций класса $\bar{\Omega}_n(G)$, совпадающих с функцией $\Delta(x)$ в точках множества $H \subset G$ ранга r .

Определение 10. Множество $H \subset G$, состоящее из $r + 1$ точек и зависимое в узком смысле, образует альтернанс для функции $\Delta(x) \in \bar{\Omega}_n(G)$, если H образует полный альтернанс для $\Delta(x) \in \bar{\Omega}_r(H)$.

Для правильного интерполяционного класса справедливы следующие основные теоремы.

Теорема 6. Если множество $H \subset G$, состоящее из $r + 1$ точек, образует альтернанс для функции $\Delta(x) \in \bar{\Omega}_n(G)$, а множество H' образует альтернанс для той же функции $\Delta(x) \in \bar{\Omega}_{n-r}^\Delta(G/H)$, то точки H' можно дополнить частью (часть может оказаться пустой) точек H и получить альтернанс для функции $\Delta(x) \in \bar{\Omega}_n(G)$.

Обозначим через

$$E(H, \bar{\Omega}_n) = \inf_{\Omega_n} \sup_H |\Delta(x)| \quad (x \in H, \Delta(x) \in \bar{\Omega}_n).$$

Теорема 7. Если для функции $\Delta^0(x) \in \bar{\Omega}_n(G)$ минимальное отклонение от нуля в точках полного альтернанса H_{n+1} больше, чем величина $\sup E(H_n, \bar{\Omega}_n)$ по всем множествам H_n , состоящим из n различных точек G , то, отправляясь от множества H_{n+1} , можно построить точную (Δ) -последовательность, которая будет сходиться к функции, являющейся единственной функцией класса $\bar{\Omega}_n$, наименее уклоняющейся от нуля на G .

Теорема 8. Для того чтобы функция класса $\bar{\Omega}_n(G)$ была функцией, наименее уклоняющейся от нуля, необходимо и достаточно, чтобы она принимала максимальные по модулю значения в точках какого-либо альтернанса.

Интерполяционный класс можно рассматривать как параметрическое семейство функций, т. е. записать его в виде $F(x, a_1, a_2, \dots, a_n)$ — функции аргумента x и параметров a_1, a_2, \dots, a_n .

Поэтому последняя теорема обобщает соответствующую теорему П. Л. Чебышева⁽²⁾, указавшего необходимые условия, которым удовлетворяет функция, наименее уклоняющаяся от нуля (П. Л. Чебышев предполагал дифференцируемость функции $F(x, a_1, a_2, \dots, a_n)$ по ее параметрам a_1, a_2, \dots, a_n). Последняя теорема обобщает также аналогичные результаты Я. Л. Геронимуса⁽⁵⁾ и М. И. Морозова⁽⁶⁾ для функций одного переменного и результат Е. Я. Ремеза⁽³⁾ для функции $F(x, a_1, a_2, \dots, a_n)$, линейной относительно параметров a_1, a_2, \dots, a_n .

Поступило
27 VI 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ С. Н. Бернштейн, Экспериментальные свойства полиномов, М. — Л., 1937.
² П. Л. Чебышев, Соч., 2, М. — Л., 1947. ³ Е. Ремез, Про методи найкращого в разуміні Чебышева, наближеного представлення функцій, Киев, АН УССР, 1935. ⁴ Е. П. Новодворский, И. Ш. Пинскер, Усп. матем. наук, 6, 6, 174 (1951). ⁵ Я. Л. Геронимус, О применении методов Чебышева к задаче уравнивания механизмов, 1948. ⁶ М. И. Морозов, Изв. АН СССР, сер. матем., 16, 1 (1952).