

И. А. КИПРИЯНОВ

О СУММИРОВАНИИ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ
ДЛЯ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 7 I 1954)

В настоящей заметке мы имеем в виду обобщить ряд результатов С. М. Лозинского (1) о суммировании тригонометрического интерполяционного процесса с равностоящими узлами на случай функций двух переменных.

Пусть

$$\sum_{i, k=0}^{\infty} \alpha_{i, k} \quad (1)$$

некоторый бесконечный двойной ряд,

$$s_{\mu, \nu} = \sum_{i=0}^{\mu} \sum_{k=0}^{\nu} \alpha_{i, k} \quad (\mu, \nu = 0, 1, 2, \dots)$$

частные суммы этого ряда. Рассмотрим четырехмерную матрицу

$$\|k_{\mu, \nu}^{(m, n)}\| \quad (m, n, \mu, \nu = 0, 1, 2, \dots), \quad (2)$$

где $k_{\mu, \nu}^{(m, n)}$ — некоторые вещественные числа, причем

$$k_{\mu, \nu}^{(m, n)} = 0, \text{ если } \mu > m \text{ или } \nu > n.$$

При помощи этой матрицы образуем новую последовательность

$$\sigma_{m, n} = \sum_{\mu=0}^m \sum_{\nu=0}^n k_{\mu, \nu}^{(m, n)} s_{\mu, \nu}. \quad (2)$$

Если $\lim_{(m, n) \tau \rightarrow \infty} \sigma_{m, n} = \sigma$, то мы скажем, что ряд (1) суммируем методом (\mathfrak{M}_{τ}) к числу σ . Символ $(m, n)_{\tau \rightarrow \infty}$ означает такое стремление m и n к бесконечности, при котором $\frac{1}{\tau} \leq \frac{m}{n} \leq \tau$ ($\tau \geq 1$). Пусть $f(x, y)$ — некоторая суммируемая функция; $s_{\mu, \nu}(f) = s_{\mu, \nu}(f; x, y)$ ($\mu, \nu = 0, 1, 2, \dots$) — последовательность частных сумм ее ряда Фурье. Положим

$$\sigma_{m, n}(f) = \sigma_{m, n}(f; x, y) = \sum_{\mu=0}^m \sum_{\nu=0}^n k_{\mu, \nu}^{(m, n)} s_{\mu, \nu}(f; x, y).$$

Обозначим через \tilde{C} множество функций $f(x, y)$, которые непрерывны и 2π -периодичны по x и по y . Если при $f \in \tilde{C}$ $\lim_{(m, n) \tau \rightarrow \infty} \sigma_{m, n}(f; x, y) = f(x, y)$ равномерно для всех (x, y) , то говорим, что метод суммирования (\mathfrak{M}_{τ}) фейеровский. Обозначая через $D_i(u)$ ($i = 0, 1, 2, \dots$) ядро Дирихле, положим

$$K_{m, n}(s, t) = \sum_{\mu=0}^m \sum_{\nu=0}^n k_{\mu, \nu}^{(m, n)} D_{\mu}(s) D_{\nu}(t).$$

Пусть $\{N_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность натуральных чисел, причем $\lim_{k \rightarrow \infty} N_k = +\infty$. Если $f(x, y)$ определена и конечна при $(x, y) \in [0, 2\pi; 0, 2\pi]$, то полагаем

$$x_{\mu} = x_{\mu}^{(m)} = \frac{2\pi\mu}{N_m}, \quad y_{\nu} = y_{\nu}^{(n)} = \frac{2\pi\nu}{N_n}$$

$$(\mu = 1, 2, \dots, N_m; \quad \nu = 1, 2, \dots, N_n);$$

$$I_{m, n}(f; x, y) = \frac{4}{N_m N_n} \sum_{\mu=1}^{N_m} \sum_{\nu=1}^{N_n} f(x_{\mu}, y_{\nu}) D_m(x - x_{\mu}) D_n(y - y_{\nu}).$$

Если $N_m = 2m + 1$, $N_n = 2n + 1$, то $I_{m, n}(f; x, y)$ превращается в тригонометрический полином порядка $\leq m$ по x и порядка $\leq n$ по y , который совпадает с $f(x, y)$ в точках $(x_{\mu}^{(m)}, y_{\nu}^{(n)})$ ($\mu = 1, 2, \dots, 2m + 1$; $\nu = 1, 2, \dots, 2n + 1$).

Записав тригонометрический полином $I_{m, n}(f; x, y)$ в виде

$$I_{m, n}(f; x, y) = \frac{a_{0,0}^{(m,n)}}{4} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m A_{i,0}^{(m,n)}(x) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n A_{0,k}^{(m,n)}(y) +$$

$$+ \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n A_{i,k}^{(m,n)}(x, y),$$

где

$$A_{i,0}^{(m,n)}(x) = a_{i,0}^{(m,n)} \cos ix + b_{i,0}^{(m,n)} \sin ix,$$

$$A_{0,k}^{(m,n)}(y) = a_{0,k}^{(m,n)} \cos ky + c_{0,k}^{(m,n)} \sin ky,$$

$$A_{i,k}^{(m,n)}(x, y) = a_{i,k}^{(m,n)} \cos ix \cos ky + b_{i,k}^{(m,n)} \sin ix \cos ky +$$

$$+ c_{i,k}^{(m,n)} \cos ix \sin ky + d_{i,k}^{(m,n)} \sin ix \sin ky,$$

положим

$$I_{\mu, \nu}^{(m, n)}(f; x, y) = \begin{cases} \frac{a_{0,0}^{(m, n)}}{4} & \text{если } \mu = 0, \nu = 0; \\ \frac{a_{0,0}^{(m, n)}}{4} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\mu} A_{i,0}^{(m, n)}(x), & \text{если } \mu \geq 1, \nu = 0; \\ \frac{a_{0,0}^{(m, n)}}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\nu} A_{0,k}^{(m, n)}(y), & \text{если } \mu = 0, \nu \geq 1; \\ \frac{a_{0,0}^{(m, n)}}{4} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\mu} A_{i,0}^{(m, n)}(x) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\nu} A_{0,k}^{(m, n)}(y) + \\ + \sum_{i=1}^{\mu} \sum_{k=1}^{\nu} A_{i,k}^{(m, n)}(x, y), & \text{если } \mu \geq 1, \nu \geq 1. \end{cases}$$

Наконец, если (\mathfrak{M}_+) — некоторый метод суммирования в указанном выше смысле, то положим

$$J_{m, n}(f; x, y) = \sum_{\mu=0}^m \sum_{\nu=0}^n k_{\mu, \nu}^{(m, n)} I_{\mu, \nu}^{(m, n)}(f; x, y) =$$

$$= \frac{4}{N_m N_n} \sum_{\mu=0}^m \sum_{\nu=0}^n f(x_{\mu}, y_{\nu}) K_{m, n}(x - x_{\mu}, y - y_{\nu}).$$

Пусть $M(u) \in \Omega$ (определение $M(u) \in \Omega$ см. в (1)) и $N(v)$ — функция класса Ω , сопряженная с $M(u)$ в смысле Орлича ((2) или, для справки, (1)). Обозначим через L^M множество всех измеримых и 2π -периодических по x и по y функций $f(x, y)$, для которых

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} M[|f(x, y)|] dx dy < +\infty.$$

Для каждой функции $f(x, y) \in L^M$ определим норму $\|f\|$ формулой

$$\|f\| = \|f\|_M = \sup_{\rho(g) \leq 1} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} fg dx dy.$$

Здесь супремум берется по всем функциям $g(x, y)$, которые удовлетворяют условию

$$\rho(g) \equiv \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} N[|g(x, y)|] dx dy \leq 1.$$

Обозначим через \tilde{A}_{xy} класс функций $f(x, y)$, которые абсолютно непрерывны (в смысле (2)) вместе с частными производными первого порядка на $[0, 2\pi; 0, 2\pi]$ и 2π -периодичны по x и по y , а через $\tilde{A}_{xy}^{(M)}$ — класс функций $f(x, y)$, которые принадлежат классу \tilde{A}_{xy} и для которых $\frac{\partial^2 f}{\partial x^{\alpha_1} \partial y^{\alpha_2}} \in L^M$ ($\alpha_1 + \alpha_2 = 2$).

Теорема 1. Пусть $\bar{M}(u) \in \Omega$ и $M(u) \in \Omega$. Если метод суммирования (\mathfrak{M}_τ) таков, что для любой $f(x, y) \in L^{\bar{M}}$

$$\lim_{(m, n)_\tau \rightarrow \infty} \|f - \sigma_{m, n}(f)\|_M = 0, \quad (3)$$

и если последовательность $\{N_k\}_{k=1}^\infty$ удовлетворяет условию

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{N_k - k}{k} > 0, \quad (4)$$

то для любой $f(x, y) \in \tilde{A}_{xy}^{(\bar{M})}$

$$\lim_{(m, n)_\tau \rightarrow \infty} \left\| \frac{\partial^2 f}{\partial x^{\alpha_1} \partial y^{\alpha_2}} - \frac{\partial^2 J_{m, n}(f)}{\partial x^{\alpha_1} \partial y^{\alpha_2}} \right\|_M = 0 \quad (\alpha_1 + \alpha_2 = 2). \quad (5)$$

Теорема 2. Пусть $\bar{M}(u) \in \Omega$. Если метод суммирования (\mathfrak{M}_τ) таков, что для любой $f(x, y) \in L^{\bar{M}}$

$$\lim_{(m, n)_\tau \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |f - \sigma_{m, n}(f)| dx dy = 0, \quad (6)$$

и если последовательность $\{N_k\}_{k=1}^\infty$ удовлетворяет условию (4), то для любой $f(x, y) \in \tilde{A}_{xy}^{(\bar{M})}$

$$\lim_{(m, n)_\tau \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x^{\alpha_1} \partial y^{\alpha_2}} - \frac{\partial^2 J_{m, n}(f)}{\partial x^{\alpha_1} \partial y^{\alpha_2}} \right| dx dy = 0 \quad (\alpha_1 + \alpha_2 = 2). \quad (7)$$

Теорема 3. Пусть метод суммирования (M_τ) Фейеровский и пусть последовательность $\{N_k\}_{k=1}^\infty$ удовлетворяет условию (4). Тогда:

1°. Для любой $f(x, y) \in L$ верно (6).

2°. Для любой $f(x, y) \in \tilde{A}_{xy}$ верно (7).

3°. Для любой $f(x, y) \in L^M$, $M(u) \in \Omega$ верно (3).

4°. Для любой $f(x, y) \in \tilde{A}_{xy}^{(M)}$, если $M(u) \in \Omega$, верно (5).

При этом условие (4) в теоремах 1–3 существенно.

Доказательство приведенных выше теорем основано на следующих двух утверждениях:

Теорема 4. Если $f(x, y) \in \tilde{A}_{xy}^{(M)}$, то существует последовательность тригонометрических полиномов $\{p_{m,n}(f; x, y)\}$ ($m, n = 0, 1, 2, \dots$) порядка $\leq m$ по x и порядка $\leq n$ по y такая, что

$$\begin{aligned} \lim_{(m, n)_\tau \rightarrow \infty} \|f - p_{m, n}(f)\|_M &= 0, \\ \lim_{(m, n)_\tau \rightarrow \infty} n \left\| \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial p_{m, n}(f)}{\partial x} \right\|_M &= 0, \\ \lim_{(m, n)_\tau \rightarrow \infty} m \left\| \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial p_{m, n}(f)}{\partial y} \right\|_M &= 0, \\ \lim_{m, n \rightarrow \infty} \left\| \frac{\partial^2 f}{\partial x^{\alpha_1} \partial y^{\alpha_2}} - \frac{\partial^2 p_{m, n}(f)}{\partial x^{\alpha_1} \partial y^{\alpha_2}} \right\|_M &= 0 \quad (\alpha_1 + \alpha_2 = 2). \end{aligned}$$

Теорема 5. Если $f(x, y) \in \tilde{A}_{xy}$, то существует последовательность тригонометрических полиномов $\{p_{m,n}(f; x, y)\}$ ($m, n = 0, 1, 2, \dots$) порядка $\leq m$ по x и порядка $\leq n$ по y такая, что

$$\begin{aligned} \lim_{(m, n)_\tau \rightarrow \infty} mn \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |f - p_{m, n}(f)| dx dy &= 0, \\ \lim_{(m, n)_\tau \rightarrow \infty} n \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial p_{m, n}(f)}{\partial x} \right| dx dy &= 0, \\ \lim_{(m, n)_\tau \rightarrow \infty} m \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial p_{m, n}(f)}{\partial y} \right| dx dy &= 0, \\ \lim_{m, n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x^{\alpha_1} \partial y^{\alpha_2}} - \frac{\partial^2 p_{m, n}(f)}{\partial x^{\alpha_1} \partial y^{\alpha_2}} \right| dx dy &= 0 \quad (\alpha_1 + \alpha_2 = 2). \end{aligned}$$

Казанский государственный
университет
им. В. И. Ульянова-Ленина

Поступило
28 XI 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ С. М. Лозинский, *Rec. Math.*, 14 (56):3 (1944). ² W. Orlicz, *Bull. de l'Acad. polonaise, ser. A* (1932). ³ В. И. Смирнов, *Курс высшей математики*, 5, 1947, стр. 237–239.