Доклады Академии Наук СССР
1954. Том XCV, № 1

МАТЕМАТИКА

Л. И. КАМЫНИН

ОБ ОДНОМ ДЕФЕКТЕ МЕТОДА ПРЯМЫХ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 5 I 1954)

Решение задачи с начальными данными на бесконечной прямой для линейных дифференциальных уравнений с частными производными (и с постоянными коэффициентами) может быть сведено методом прямых (т. е. заменой производных по x конечноразностными отношениями и сохранением производных по t) к решению бесконечной системы обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{d^k u_n}{dt^k} = \sum_{\alpha=-s}^{r} C_\alpha u_{n+\alpha}, \tag{1}$$

$$\frac{d^l u_n(0)}{dt^l} = \varphi_l(n); \quad l=0, 1, 2, \ldots, k-1; \quad n = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots \tag{2}$$

В работе [2] было указано на различие теорем единственности для уравнения теплопроводности и его конечноразностного аналога (1), (2). Однако оказывается, что ограничения на рост начальных функций $\varphi_l(x)$ ($l = 0, 1, 2, \ldots, k-1$) и решения $u_n(t)$, необходимые для единственности решения системы (1), (2), а также условия на рост $u_n(t)$ и его производных по t, достаточные для неединственности решения (1), (2), совсем не связаны с типом уравнения с частными производными и зависят лишь от постоянных r, s и k (т. е. от свойств самой бесконечной системы (1), (2)). В частности, если методом прямых искать решение гиперболического уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{3}$$

с начальными данными

$$u(x, 0) = \varphi_1(x); \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \varphi_2(x); \quad -\infty < x < +\infty, \tag{4}$$

то получим систему

$$\frac{\partial^2 u^{(h)}(x, t)}{\partial t^2} = \frac{1}{h^2}\left(u^{(h)}(x+h, t) - 2u^{(h)}(x, t) + u^{(h)}(x-h, t)\right), \tag{5}$$

$$\frac{\partial^l u^{(h)}(x, 0)}{\partial t^l} = \varphi_l(x); \quad l = 0, 1; \quad x = \ldots, -2h, -h, 0, h, 2h, \ldots \tag{6}$$

Между уравнением (3) и системой (5) имеется следующее существенное различие. В то время как решение задачи с начальными данными (4) всегда единственно для (3), если только $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$

достаточно гладки, решение системы (5), (6) будет единственным лишь в классе функций, рост которых ограничен условием

$$\left|\frac{\partial^l u^{(h)}(x,\ t)}{\partial t^l}\right| = O\left(\left[(1-\varepsilon)\frac{2\,|x|}{h}\right]!\right), \quad l=0,1; \quad |t| \leqslant T < +\infty;\ 0<\varepsilon\leqslant 1. \tag{7}$$

Если $|\varphi_l(x)| = O\left(\left[(1-\varepsilon)\frac{2\,|x|}{h}\right]!\right)$, $l=0,1$, то это единственное решение имеет вид

$$u^{(h)}(nh,\ t) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\varphi_1(nh+kh)}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos\left(kz+\frac{2t}{h}\sin\frac{z}{2}\right)dz +$$

$$+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\varphi_1(nh-kh)}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos\left(kz-\frac{2t}{h}\sin\frac{z}{2}\right)dz +$$

$$+\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\varphi_2(nh+kh)}{2\pi}\int_0^t\int_0^{2\pi}\cos\left(kz+\frac{2\tau}{h}\sin\frac{z}{2}\right)d\tau\,dz +$$

$$+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\varphi_2(nh-kh)}{2\pi}\int_0^t\int_0^{2\pi}\cos\left(kz-\frac{2\tau}{h}\sin\frac{z}{2}\right)d\tau\,dz,$$

$$n=\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots$$

Доказательство этого утверждения проводится так же, как и в [3]. Если же расширить класс допустимых функций условием

$$\left|\frac{\partial^l u^{(h)}(x,\ t)}{\partial t^l}\right| = O\left(\left[(1+\varepsilon\frac{2\,|x|}{h}\right]!\right); \tag{8}$$

$l=0,1$; $|t|\leqslant T<+\infty$; $\varepsilon>0$; $x=\ldots,-2h,-h,0,h,2h,\ldots$,

то для любого ε $(0<\varepsilon<1)$ функции

$$u^{(h)}(0,\ t)\equiv 0; \quad u^{(h)}(nh,\ t) = \sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{h^{2\nu+1}\,n\,(n^2-1^2)\ldots(n^2-\nu^2)}{(2\nu+1)!}F^{(2\nu)}(t);$$

$$u^{(h)}(-nh,\ t)\equiv -u^{(h)}(nh,\ t); \quad n=1,2,\ldots,$$

представляют собой решение системы (5), не равное тождественно нулю и удовлетворяющее нулевым начальным данным, если только $F(t)$ выбрана так, что

$$\begin{gathered} 1)\ F(t)\not\equiv 0; \qquad 2)\ F^{(\nu)}(0)=0; \quad \nu=0,1,2,\ldots; \\ 3)\ |F^{(\nu)}(t)|\leqslant[(1+\varepsilon_1)\nu]!; \quad 0<\varepsilon_1<\varepsilon<1; \quad |t|\leqslant T<+\infty \end{gathered} \tag{9}$$

(подобный выбор $F(t)$ возможен [1]).

Таким образом, метод прямых заведомо неприменим к решению уравнения (3), если начальные функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ растут достаточно быстро при $x\to\infty$ (например, быстрее, чем e^{x^2}), ибо тогда при любом фиксированном «шаге» h для достаточно больших $|x|$ было бы $\varphi_l(x)\geqslant\left[(1+\varepsilon)\frac{2\,|x|}{h}\right]!$, $l=1,2$, и потому система (5) имела бы более одного решения, удовлетворяющего (6).

Причина подобного различия теорем единственности для уравнения (3), (4) и системы (5), (6) заключается, конечно, в том, что решение (3) $u(x,t)$ зависит (при фиксированных x и t) от значений $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ только в ограниченной области изменения x, тогда как решение $u^{(h)}(x,t)$ системы (5), (6) зависит от поведения $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ на всей бесконечной прямой $(-\infty<x<+\infty)$. Следующая теорема показывает, что ограничение роста (при $|x| \to \infty$) решения и начальных функций, необходимое для единственности решения системы (1), (2), характерно для бесконечных систем обыкновенных дифференциальных уравнений и является дефектом метода прямых.

Теорема. *Бесконечная система дифференциальных уравнений* (1) (C_α *можно заменить на* $C_{n+\alpha}$, *если* $|C_{n+\alpha}| \leqslant C$) *всегда имеет решение, удовлетворяющее начальным данным* (2), *если только*

$$|\varphi_l(n)| = O\left(\left[(1-\varepsilon)\frac{kn}{r}\right]!\right), \quad C_r \neq 0, \quad r \geqslant 1, \quad n = 0, 1, 2, \ldots; \quad (10)$$

$$|\varphi_l(n)| = O\left(\left[(1-\varepsilon)\frac{k|n|}{s}\right]!\right), \quad C_{-s} \neq 0, \quad s \geqslant 1, \quad n = -1, -2, \ldots \quad (11)$$

Это решение единственно в классе функций

$$\left|\frac{d^l u_n(t)}{dt^l}\right| = O\left(\left[(1-\varepsilon)\frac{kn}{r}\right]!\right), \quad n = 0, 1, 2, \ldots; \quad (12)$$

$$\left|\frac{d^l u_n(t)}{dt^l}\right| = O\left(\left[(1-\varepsilon)\frac{k|n|}{s}\right]!\right), \quad n = -1, -2, \ldots; \quad (13)$$

$$l = 0, 1, 2, \ldots, k-1; \quad |t| \leqslant T < +\infty; \quad 0 < \varepsilon \leqslant 1.$$

Для любого $\varepsilon > 0$ *и любых* C_α ($\alpha = -s, -s+1, \ldots, r$) *можно построить решение* $v_n(t)$, $n = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots,$ *системы* (1) *такое, что*

$$v_n(t) \not\equiv 0, \quad \frac{d^l v_n(0)}{dt^l} = 0, \quad l = 0, 1, 2, \ldots, k-1; \quad (14)$$

$$\left|\frac{d^l v_n(t)}{dt^l}\right| = O\left(\left[(1+\varepsilon)\frac{kn}{r}\right]!\right), \quad n = 0, 1, 2, \ldots; \quad (15)$$

$$\left|\frac{d^l v_n(t)}{dt^l}\right| = O\left(\left[(1+\varepsilon)\frac{k|n|}{s}\right]!\right), \quad n = -1, -2, \ldots; \quad (16)$$

$$l = 0, 1, 2, \ldots, k-1, \quad |t| \leqslant T < +\infty, \quad 0 < \varepsilon < 1.$$

Примечание. Если $r = 0$, то условия (10), (12) снимаются, так как система (1) становится рекуррентной при $n > 0$ (без ограничения общности можно считать $C_0 = 0$, в противном случае делаем замену $w_n(t) = u_n(t)e^{-C_0 t}$; $n = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$). Если $s = 0$, то снимаются условия (11), (13).

Доказательство. Существование решения системы (1), (2) при условиях (10), (11), и единственность решения системы (1), (2) в классе функций (12), (13) следует из [2].

Для построения решения системы (1) $v_n(t)$, $n = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$, удовлетворяющего (14), (15) и (16), рассмотрим отдельно три типа систем (1):

1) $r \geqslant 1$, $s \geqslant 1$, $C_r \neq 0$, $C_{-s} \neq 0$;

2) $r = 0$, $C_{-s} \neq 0$;

3) $s = 0$, $C_r \neq 0$.

В случае 1) положим

$$v_l(t) = F(t), \quad l = -s+1, \ldots, r; \quad (17)$$

$$v_{n+r}(t) = \frac{1}{C_r}\left(-\sum_{\alpha=-s}^{r-1} C_\alpha u_{n+\alpha} + \frac{d^k u_n}{dt^k}\right), \quad n = 1, 2, \ldots; \quad (18)$$

$$v_{n-s}(t) = \frac{1}{C_{-s}}\left(-\sum_{\alpha=-s+1}^{r} C_\alpha u_{n+\alpha} + \frac{d^k u_n}{dt^k}\right), \quad n = 0, -1, -2, \ldots \quad (19)$$

Полученное решение системы (1) удовлетворяет условию (14), если для $F(t)$ выполнено (9).

Пусть

$$C \geqslant \max_{\alpha=-s,\ldots,r}\left(1, \left|\frac{C_\alpha}{C_{-s}}\right|, \left|\frac{C_\alpha}{C_r}\right|\right).$$

Предположим, далее, что $v_n(t)$ есть линейная комбинация производных $F(t)$, причем число членов есть α_n, наивысший порядок производной $F(t)$ равен β_n и коэффициенты при производных не превышают по абсолютной величине C^{γ_n}. Тогда, в силу (18) $(n>0)$,

$$\alpha_{n+r} \leqslant \alpha_{n-s} + \ldots + \alpha_{n+r-1}; \quad \gamma_{n+1} = \gamma_n + 1,$$

откуда

$$\alpha_n \leqslant \alpha_{n+1}; \quad \alpha_{n+1} \leqslant (r+s)\,\alpha_n; \quad \alpha_1 = \gamma_1 = 1; \quad \alpha_n \leqslant (r+s)^{n-1}; \quad \gamma_n = n.$$

Из (17), (18) следует $\beta_l = 0$, $l = 1, 2, \ldots, r$; $\beta_{r+1} = k$, $\beta_n = \left[\frac{n-1}{r}\right]k$. Поэтому

$$\left|\frac{d^l v_n(t)}{dt^l}\right| \leqslant (r+s)^{n-1}C^n\left[(1+\varepsilon_1)\left(k\left[\frac{n-1}{r}\right]+l\right)\right]!, \quad l = 0, 1, 2, \ldots, k-1,$$

т. е. выполнено (15) при $0<\varepsilon_1<\varepsilon$.

Аналогично показывается выполнение (16).

В случае 2) положим

$$v_l(t) = F(t), \quad l = 0, 1, 2, \ldots, r-1;$$

$$v_n(t) = \int_0^t\int_0^{\tau_1}\cdots\int_0^{\tau_{k-1}}\sum_{\alpha=1}^{r} C_\alpha u_{n+\alpha}(\tau_k)\,d\tau_1\,d\tau_2\ldots d\tau_k, \quad n = -1, -2, \ldots$$

$v_n(t)$ для $n = r, r+1, \ldots$ возьмем из (18).

Считая

$$C \geqslant \max_{\alpha=1,\ldots,r}\left(1, \left|\frac{C_\alpha}{C_r}\right|\right),$$

легко получить оценки

$$|v_n(t)| \leqslant r^n C^n\left[(1+\varepsilon_1)\frac{kn}{r}\right]!, \quad n \geqslant 0;$$

$$|v_n(t)| \leqslant (rCT^k)^{|n|} \quad \text{при } n<0.$$

Тем самым выполнено (15), (16). В случае 3) доказательство аналогично.

Поступило
5 XI 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Н. Тихонов, Матем. сборн., **42**, 199 (1935). [2] Л. И. Камынин, Изв. АН СССР, сер. матем., **17**, 163 (1953). [3] Л. И. Камынин, ДАН, **93**, № 3, 397 (1953).