

М. И. ГРАБАРЬ

О СТРОГОЙ ЭРГОДИЧНОСТИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 16 I 1954)

В настоящей работе рассматриваются динамические системы с компактным фазовым пространством, т. е. непрерывные однопараметрические группы $\{S_t\}$ гомеоморфизмов компакта R . Наряду с подобными системами с „непрерывным временем“ будут рассматриваться и так называемые „дискретные системы“, т. е. системы $\{S^h\}$, составленные из всех целых степеней некоторого отдельного гомеоморфизма S компакта R . Для того чтобы сформулировать основной результат работы, введем такие определения.

Определение 1. Динамическая система (непрерывная или дискретная) называется строго эргодической, если она допускает единственную инвариантную нормированную меру (¹).

Определение 2. Динамическая система (непрерывная или дискретная) называется неприводимой, если траектория каждой точки всюду плотна во всем фазовом пространстве.

Рассмотрим теперь следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \alpha_1, \\ \frac{dy}{dt} &= \alpha_2, \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{\lambda}{\Phi(x, y)},\end{aligned}\tag{1}$$

где x, y, z — циклические переменные, взятые по $\text{mod } 2\pi$; $\Phi(x, y)$ — непрерывная положительная функция, периодическая по каждому переменному с периодом 2π ; отношение $\alpha_2/\alpha_1 = \gamma$ — иррациональное число и $\lambda \neq 0$ — произвольное действительное число.

Основной результат, полученный в работе, состоит в том, что можно так выбрать аналитическую функцию $\Phi(x, y)$ и иррациональное отношение $\gamma = \alpha_2/\alpha_1$, что при любом $\lambda \neq 0$ система (1) будет определять на трехмерном торе R_3 (с циклическими координатами x, y, z) неприводимую динамическую систему, которая, в зависимости от выбора λ , либо будет строго эргодической, либо нет, причем оба случая имеют место в действительности.

В связи с этим необходимо отметить следующее. Впервые пример неприводимой, но не строго эргодической системы был построен А. А. Марковым (¹). В опубликованном в 1952 г. обзоре (²) по эргодическим множествам приведен несколько более простой пример подобной системы. Однако оба эти примера представляют собой аб-

страктно заданные динамические системы с фазовыми пространствами, не являющимися даже многообразиями.

Для получения упомянутого основного результата нам понадобятся четыре теоремы общего характера относительно свойств строгой эргодичности и неприводимости динамических систем, которые, для краткости изложения, мы приведем без доказательств.

Теорема 1. Пусть $\{S_t\}$ — строго эргодическая система, определенная в компакте R , и пусть $\lambda \neq 0$ — произвольное действительное число. Для того чтобы гомеоморфизм $S_{2\pi/\lambda}$ был строго эргодичен, необходимо и достаточно, чтобы среди собственных чисел системы $\{S_t\}$ не было чисел вида $k\lambda$, где $k \neq 0$ — целое число.

Определение 3. Замкнутое множество $F \subset R$ называется сечением системы $\{S_t\}$ периода $t_0 \neq 0$, если выполняются следующие условия:

- 1°. $S_{kt_0}(F) = F$ для любого целого k .
- 2°. Если $S_t(F) \cap F \neq \emptyset$, то $t = kt_0$, где k — целое число.
- 3°. $\bigcup_t S_t(F) = R$.

Гомеоморфизм S_{t_0} порождает на сечении F дискретную динамическую систему, а именно систему всех своих степеней $\{S_{kt_0}^h\}$ (3). Нетрудно видеть, что существование у динамической системы сечения эквивалентно существованию непрерывной собственной функции системы, причем период сечения t_0 и собственное число λ связаны соотношением $t_0\lambda = 2\pi$.

Теорема 2. Пусть $\{S_t\}$ — динамическая система в компакте R и F — сечение системы периода $t_0 \neq 0$. Система $\{S_t\}$ строго эргодична в R тогда и только тогда, когда гомеоморфизм S_{t_0} строго эргодичен на сечении F .

Пусть теперь динамическая система $\{S_t\}$, определенная в R , неприводима. Между неприводимостью отдельных гомеоморфизмов системы и существованием непостоянных, непрерывных собственных функций имеется тесная связь, устанавливаемая следующей теоремой, аналогичной теореме 1:

Теорема 3. Гомеоморфизм $S_{2\pi/\lambda}$ неприводим тогда и только тогда, когда система $\{S_t\}$ не допускает непрерывных собственных функций, отвечающих собственным значениям вида $k\lambda$, где $k \neq 0$ — целое число.

Наконец, для дальнейшего нам понадобится также одна теорема, относящаяся к гармонизируемым (4) системам. Напомним, что динамическая система называется гармонизируемой, если при помощи монотонной замены времени она может быть преобразована в почти-периодическую систему. Имеет место следующая теорема:

Теорема 4. Неприводимая гармонизируемая динамическая система, расположенная на n -мерном торе и обладающая непостоянной непрерывной собственной функцией, почти-периодична*.

Рассмотрим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \alpha_1 \Phi(x, y); \\ \frac{dy}{dt} &= \alpha_2 \Phi(x, y), \end{aligned} \quad (A)$$

где x, y — циклические переменные, взятые по mod 2π ; $\Phi(x, y)$ — непрерывная положительная функция, периодичная по каждому переменному с периодом 2π и отношение $\gamma = \alpha_2/\alpha_1$ иррационально. Система (A) определяет на двумерном торе R_2 ($0 \leq x \leq 2\pi$; $0 \leq y \leq 2\pi$) дина-

* Эта теорема содержалась в (6).

мическую систему $\{S_t\}$, которая получена из канонической системы $dx/dt = \alpha_1$, $dy/dt = \alpha_2$ заменой времени $dt = d\tau / \Phi(x, y)$ и, следовательно, представляет собой неприводимую гармонизуемую систему. Пусть теперь $\lambda \neq 0$ — произвольное действительное число. Рассмотрим такую систему трех дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \alpha_1 \Phi(x, y); \\ \frac{dy}{dt} &= \alpha_2 \Phi(x, y); \\ \frac{dz}{dt} &= \lambda \end{aligned} \quad (B)$$

(переменная z также берется по $\text{mod } 2\pi$). Система (B) определяет на трехмерном торе R_3 динамическую систему, которую мы обозначим через $\{S_t^{(\lambda)}\}$. Нетрудно видеть, что тор R_2 , естественно отождествляемый с подмножеством $\{z = 0\}$ тора R_3 , представляет собой сечение системы $\{S_t^{(\lambda)}\}$ периода $t_0 = 2\pi/\lambda$. Это означает, что гомеоморфизм $S_{t_0}^{(\lambda)}$ системы (B), рассматриваемый на торе R_2 , совпадает с гомеоморфизмом $S_{2\pi/\lambda}$ системы (A). Отсюда вытекают следующие общие выводы:

1. Система (B) неприводима тогда и только тогда, когда гомеоморфизм $S_{2\pi/\lambda}$ системы (A) неприводим в R_2 (3).

2. Система (B) строго эргодична тогда и только тогда, когда гомеоморфизм $S_{2\pi/\lambda}$ системы (A) строго эргодичен в R_2 (теорема 2).

Сюда примыкает также следующее легко доказываемое предложение:

3. Система (B) почти-периодична тогда и только тогда, когда почти-периодична система (A).

Предположим теперь, что система (A) выбрана заведомо не почти-периодической. А. А. Марковым впервые было показано (4), что такой выбор можно осуществить подбором чисел α_1 , α_2 с иррациональным $\gamma = \alpha_2/\alpha_1$ и функции $\Phi(x, y)$, причем последняя может быть выбрана аналитической. Согласно теореме 4 система (A) в этом случае не может иметь непостоянных непрерывных собственных функций, и на основании теоремы 3 и вывода 1 мы заключаем, что система (B) при любом $\lambda \neq 0$ будет неприводимой.

Далее, если среди собственных чисел системы (A) нет чисел вида $k\lambda$, где $k \neq 0$ — целое число, то по теореме 1 и второму выводу заключаем, что система (B) строго эргодична. Если же для некоторого целого $k \neq 0$ $k\lambda$ является собственным числом системы (A), то система (B) не строго эргодична. Остается показать, что оба эти случая имеют место в действительности.

Так как множество собственных чисел системы (A) не более чем счетно, то случай строгой эргодичности всегда может быть реализован. Реализуемость второго случая следует из результатов А. Н. Колмогорова. Именно, А. Н. Колмогоровым было доказано (5), что можно так выбрать аналитическую функцию $\Phi(x, y)$ и иррациональное отношение $\gamma = \alpha_2/\alpha_1$, что система (A) будет обладать чисто точечным спектром, но все собственные функции будут всюду разрывными. Если в качестве системы (A) выбрать динамическую систему А. Н. Колмогорова, то для системы (B) будут иметь место оба указанных случая.

Рассмотрим, наконец, систему (1). Система (1), очевидно, получена из (B) заменой времени посредством функции $\Phi(x, y)$, и потому, как нетрудно видеть, для нее справедливы все предыдущие выводы, а именно:

1. Система (1) неприводима при любом $\lambda \neq 0$.
2. Если $k\lambda$ ни при каком целом $k \neq 0$ не является собственным числом системы (A), то система (1) строго эргодична.
3. Если при некотором целом $k \neq 0$ $k\lambda$ является собственным числом системы (A), то система (1) не строго эргодична.

Замечания. 1. Согласно теореме 4, система (1), так же как и (B), не только не почти-периодична, но и не гармонизируема, ибо она обладает даже двумя непрерывными собственными функциями e^{ix} и e^{iy} с собственными значениями α_1 и α_2 .

2. Система (1) допускает в качестве интегрального инварианта объем, причем в случае 2 этот объем, надлежаще нормированный, будет единственной неразложимой инвариантной мерой, в случае же 3 можно доказать, что объем не будет неразложимым.

Поступило
13 XI 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ В. В. Немыцкий, В. В. Степанов, Качественная теория дифференциальных уравнений, 1949. ² J. C. Oxtoby, Bull. Am. Math. Soc., 58, No. 2, стр. 116 (1952). ³ Н. П. Житков, Уч. зап. МГУ, в. 163, 6 (1952). ⁴ А. А. Марков, Тр. 2-го Всесоюз. съезда матем., 1934. ⁵ А. Н. Колмогоров, ДАН, 93, № 5 (1953). ⁶ М. И. Грабарь, Кандидатская диссертация, Неприводимые динамические системы, МГУ, 1952.