Доклады Академии Наук СССР
1954. Том XCIV, № 4

АСТРОНОМИЯ

Академик Л. И. СЕДОВ

О ТЕОРЕТИЧЕСКИХ ФОРМУЛАХ ДЛЯ ЗВЕЗДНЫХ ЗАКОНОМЕРНОСТЕЙ «СВЕТИМОСТЬ — МАССА» И «РАДИУС — МАССА»

Исследование внутреннего строения звезд и получение соотношения между их радиусом $\mathfrak{R}$, светимостью $\mathfrak{L}^*$ и массой $\mathfrak{M}$ производилось различными авторами на основе уравнений равновесия совершенного газа с учетом излучения ([1-3]).

Эти уравнения ([1]) при наличии сферической симметрии и термодинамической равновесности имеют вид:

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dr}+\frac{fm}{r^2}=0;$$
$$\frac{dm}{dr}=4\pi r^2\rho;$$
$$p=\frac{R\rho T}{\mu}+\frac{a}{3}T^4; \tag{1}$$
$$\frac{d}{dr}\frac{(RT)^4}{3}=-\frac{\varkappa_1\mathfrak{L}\rho}{4\pi r^2};$$
$$\varkappa_1=\frac{\varkappa R^4}{ac};$$
$$\frac{d\mathfrak{L}}{dr}=4\pi r^2\rho\varepsilon,$$

где r — переменный радиус; ρ — плотность; p — давление; $m(r)$ — масса; T — абсолютная температура; $\mathfrak{L}(r)$ — светимость (полный поток лучистой энергии сквозь сферу радиуса r); f — гравитационная постоянная; R — абсолютная газовая постоянная; a — постоянная Стефана; c — скорость света; μ — молекулярный вес; $\varkappa$ — коэффициент поглощения; ε — интенсивность источников энергии, выделяемой единицей массы звездного вещества в единицу времени.

Если μ, $\varkappa$ и ε заданы в функции других переменных, входящих в систему (1), то решение системы (1) определяется следующими принятыми в астрофизике краевыми условиями:

в центре звезды при $m=0$ $r=0$ и $\mathfrak{L}=0$; (2)

на внешней поверхности звезды при $m=\mathfrak{M}$ $\rho=0$ и $T=0$. (3)

В сформулированной выше постановке Стремгрен ([1], [2]) рассматривал эту задачу при следующих дополнительных предположениях:

1°. В уравнении состояния отбрасывался член $aT^4/3$, соответствующий давлению излучения.

2°. Молекулярный вес μ постоянен везде внутри звезды.

3°. Для коэффициента поглощения и для источников энергии приняты формулы:

$$\varkappa_1 = B\rho(RT)^{-3-s}, \quad \varepsilon = \varepsilon_0 \rho^\alpha (RT)^\beta,$$

где B, ε_0, α, β и s — постоянные.

Опираясь на эти допущения, Стремгрен установил формулу

$$\mathfrak{L}^* = \mathfrak{D}\frac{1}{B}\frac{\mathfrak{M}^{5+s}}{\mathfrak{R}^s}\mu^{7+s}, \tag{4}$$

где постоянная $\mathfrak{D}$ зависит только от f, s, α, β.

Ниже при помощи элементарных соображений теории размерностей при сохранении предположения 1°, а вместо 2° и 3° — при более общих допущениях, заключенных в формулах:

$$\mu = \mu_0 \rho^{1-\xi}(RT)^{1-\eta}; \quad \varkappa_1 = B\rho^w (RT)^v; \quad \varepsilon = \varepsilon_0 \rho^\alpha (RT)^\beta, \tag{5}$$

где ξ, η, w и v — постоянные, мы указываем вместо одного соотношения (4) два соотношения вида:

$$\mathfrak{R} = \Phi_1(\mathfrak{M}, \varepsilon_0, B, \mu_0 f); \qquad \mathfrak{L}^* = \Phi_2(\mathfrak{M}, \varepsilon_0, B, \mu_0 f) \tag{6}$$

(см. формулы (18) и (19)).

Введем новые переменные

$$p_1 = \frac{p}{f}, \quad \tau = \frac{RT}{(f\mu_0)^{1/\eta}}, \quad x = \frac{m}{\mathfrak{M}}$$

и обозначения

$$\frac{a(f\mu_0)^{4/\eta}}{3fR^4} = \Omega, \quad B\varepsilon_0 (f\mu_0)^{(v+\beta-4)/\eta} = \omega.$$

Нетрудно проверить, что уравнение (1) и краевое условие (2) эквивалентны системе уравнений:

$$\begin{aligned} &\frac{dp_1}{dx} = -\frac{x\,\mathfrak{M}^2}{4\pi r^4};\\ &r^3 = \frac{3}{4\pi}\mathfrak{M}\int_0^x \frac{dx}{\rho};\\ &p_1 = \rho^\xi \tau^\eta + \Omega\tau^4;\\ &\tau^3\frac{d\tau}{dx} = -\frac{3\omega\,\mathfrak{M}^2}{16\pi^2 r^4}\rho^w \tau^v \int_0^x \rho^\alpha \tau^\beta dx \end{aligned} \tag{7}$$

и формуле для вычисления светимости

$$\mathfrak{L} = \varepsilon_0 \mathfrak{M}(\mu_0 f)^{\beta/\eta}\int_0^x \rho^\alpha \tau^\beta dx. \tag{8}$$

Таким образом задача сводится к разрешению системы уравнений (7) при следующих краевых условиях на поверхности звезды *

$$\text{при} \quad x = 1 \quad \rho = 0 \ \text{ и } \ \tau = 0. \tag{9}$$

Следовательно, если решение поставленной математической задачи существует и имеет физический смысл, то искомые функции

---

* Краевые условия (9) можно видоизменять. Если в видоизмененных условиях не появляются физические постоянные, то все последующие выводы сохраняют свою силу.

r, ρ, τ и p_1 ($[p_1]=M^2L^{-4}$; $[\tau]=M^{\frac{2-\xi}{\eta}}L^{\frac{3\xi-4}{\eta}}$) определяются величинами x, $\mathfrak{M}$, ω, Ω, причем имеет место следующие формулы размерности:

$$[\mathfrak{M}]=M;\quad [\omega]=M^{k_1}L^{k_2};\quad [\Omega]=M^{2-4\frac{2-\xi}{\eta}}L^{-4-4\frac{3\xi-4}{\eta}}, \tag{10}$$

где

$$k_1=-2-w-\alpha+\frac{(4-v-\beta)(2-\xi)}{\eta};\quad k_2=4+3w+3\alpha+\frac{(4-v-\beta)(3\xi-4)}{\eta}. \tag{11}$$

Дальше мы примем, что $k_2\neq 0$. Если допустить, что $\Omega=0$ (предположение 1°) или если $\xi=\eta=1$ (предположение 2°), то в случае $k_2=0$ среди определяющих величин нет величин, зависящих от линейных размеров, тогда как искомые величины r, ρ, τ, p_1 связаны с линейными размерами, поэтому в этом случае указанная выше постановка задачи нуждается в уточнениях.

Из определяющих параметров можно составить только две независимых отвлеченных комбинации:

$$x=\frac{m}{\mathfrak{M}};\qquad \delta=\frac{\Omega}{\mathfrak{M}^{k_3}}\,\omega^{\frac{4\eta+4(3\xi-4)}{(4+3w+3\alpha)\eta+(4-v-\beta)(3\xi-4)}}, \tag{12}$$

где

$$k_3=\frac{1}{\eta}\left\{2\eta-4(2-\xi)-\frac{[4\eta+4(3\xi-4)]\,[(2+w+\alpha)\eta-(4-v-\beta)(2-\xi)]}{(4+3w+3\alpha)\eta+(4-v-\beta)(3\xi-4)}\right\}. \tag{13}$$

Очевидно, что при $\mu=\mathrm{const}$, т. е. $\xi=\eta=1$, имеем $k_3=-2$ и $\delta=\Omega\,\mathfrak{M}^2$.

Если равенства $\xi=1$ и $\eta=1$ не выполняются одновременно, то при некоторых значениях показателей ξ, η, α, β, w, v можно удовлетворить равенству

$$k_3=0. \tag{14}$$

При $k_3=0$ получим, что отвлеченный параметр δ не зависит от массы $\mathfrak{M}$.

Из общих соображений теории размерности [4] вытекает, что искомое решение имеет вид:

$$\begin{gathered} r=\left(\frac{\omega}{\mathfrak{M}^{k_1}}\right)^{1/k_2} r_1(x,\ \delta);\\ \rho=\mathfrak{M}\left(\frac{\omega}{\mathfrak{M}^{k_1}}\right)^{-3/k_2}\rho_1(x,\ \delta);\\ \tau=\omega^{\frac{3\xi-4}{k_2\eta}}\,\mathfrak{M}^{\frac{(2-\xi)k_2-(3\xi-4)k_1}{k_2\eta}}\,\tau_1(x,\ \delta);\\ p_1=\omega^{-\frac{4}{k_2}}\,\mathfrak{M}^{2+\frac{4k_1}{k_2}}\,(\rho_1^{\xi}\tau_1^{\eta}+\delta\tau_1^4). \end{gathered} \tag{15}$$

Подстановка формул (15) в систему уравнений (7) и краевые условия (9) приводит к уравнениям:

$$\begin{gathered} \frac{d}{dx}(\rho_1^{\xi}\tau_1^{\eta}+\delta\tau_1^4)=-\frac{x}{4\pi r_1^4};\\ r_1^3=\frac{3}{4\pi}\int_0^x\frac{dx}{\rho_1};\\ \tau_1^3\frac{d\tau_1}{dx}=-\frac{3}{16\pi^2 r_1^4}\rho_1^{w}\tau_1^{v}\int_0^x\rho_1^{\alpha}\tau_1^{\beta}\,dx \end{gathered} \tag{16}$$

и краевым условиям:

$$\text{при } x = 1 \qquad \rho_1 = 0, \quad \tau_1 = 0. \tag{17}$$

Уравнения (16) и условия (17) не содержат размерных постоянных $\mathfrak{M}$, ω и определяют безразмерные функции $r_1(x, \delta)$, $\rho_1(x, \delta)$ и $\tau_1(x, \delta)$. Параметр δ не войдет, если принять предположение 1°. В последнем случае функции $r_1(x)$, $\rho_1(x)$ и $\tau_1(x)$ являются универсальными числовыми функциями, зависящими только от значений показателей ξ, η, v, w, α, β.

На основании формул (15) и (8) и учитывая (6) и (11), для радиуса $\mathfrak{R}$ и светимости звезды $\mathfrak{L}^*$ получим:

$$\mathfrak{R} = (B\varepsilon_0)^{\frac{\eta}{(4+3w+3\alpha)\eta + (4-v-\beta)(3\xi-4)}} (f\mu_0)^{\frac{v+\beta-4}{(4+3w+3\alpha)\eta+(4-v-\beta)(3\xi-4)}} \times$$

$$\times \mathfrak{M}^{\frac{(2+w+\alpha)\eta - (4-v-\beta)(2-\xi)}{(4+3w+3\alpha)\eta+(4-v-\beta)(3\xi-4)}} r_1(1, \delta); \tag{18}$$

$$\mathfrak{L}^* = \varepsilon_0 (B\varepsilon_0)^{\frac{(3\xi-4)\beta - 3\alpha\eta}{(4+3w+3\alpha)\eta+(4-v-\beta)(3\xi-4)}} (f\mu_0)^{\frac{\beta}{\eta} - \frac{v+\beta-4}{\eta}\left[\frac{(3\xi-4)\beta-3\alpha\eta}{(4+3w+3\alpha)\eta+(4-v-\beta)(3\xi-4)}\right]} \times$$

$$\times \mathfrak{M}^{1+\alpha+\frac{2-\xi}{\eta}\beta+\frac{[(2+w+\alpha)\eta-(4-v-\beta)(2-\xi)][(3\xi-4)\beta-3\alpha\eta]}{[(4+3w+3\alpha)\eta+(4-v-\beta)(3\xi-4)]\eta}} \int\limits_0^1 \rho_1^\alpha \tau_1^\beta \, dx_1. \tag{19}$$

Если пренебречь световым давлением в уравнении состояния — предположение 1°, то надо положить $\delta = 0$, после чего формулы (18) и (19) определяют полностью зависимость $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{L}^*$ от ε_0, $f\mu_0$, B и от массы звезды $\mathfrak{M}$.

Если $\delta \neq 0$, но $k_3 = 0$, то δ не зависит от массы звезды, и поэтому в этом случае формулы (18) и (19) также полностью определят зависимость $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{L}^*$ от массы звезды $\mathfrak{M}$.

Если из формул (18) и (19) исключить ε_0, то получим соотношение:

$$B\mathfrak{L}^* = \mathfrak{D} (f\mu_0)^{\frac{4-v}{\eta}} \mathfrak{R}^{4+3w+(4-v)\frac{3\xi-4}{\eta}} \mathfrak{M}^{-1-w+(4-v)\frac{2-\xi}{\eta}}, \tag{20}$$

где $\mathfrak{D}$ — отвлеченная постоянная, которая при $\delta = 0$ может зависеть только от ξ, η, α, β, w, v.

Любопытно отметить, что в формуле (20) от закона выделения энергии может зависеть только постоянная $\mathfrak{D}$.

Формула (4) получается как частный случай из формулы (20).

Нетрудно убедиться непосредственно, что формула (20) сохраняет свою силу для модели звезды с точечным источником энергии в центре звезды, когда мощность точечного источника энергии $\mathfrak{L}^*$ задается произвольно.

Формулы (18), (19) и (20) можно использовать для обработки наблюдений. При сопоставлении этих формул с эмпирическими данными можно получить некоторые основания для суждения о законах (5), а также о законности принятой постановки задачи.

Поступило
15 XII 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] B. Strömgren, Handb. d. Astrophys., 7, 1936, S. 159; Erg. Exact. Naturwiss., **16**, 1937, S. 465. [2] S. Chandrasekhar, An Introduction to the Study of Stellar Structure; русск. пер. Чендрасекар, Введение в учение о строении звезд, ИЛ, М., 1950. [3] В. А. Амбарцумян, Э. Р. Мустель, А. Б. Соболев, В. В. Соболев, Теоретическая астрофизика, М., 1952. [4] Л. И. Седов, Методы подобия и размерности в механике, М.— Л., 1951.