Доклады Академии Наук СССР
1954. Том XCIV, № 4

ГИДРОМЕХАНИКА

В. Н. ТАЛИЕВ

ПОПУТНОЕ ИСТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ ИЗ КАНАЛА ПОСТОЯННОГО СЕЧЕНИЯ

(Представлено академиком А. И. Некрасовым 24 XI 1953)

Предположим, что имеется канал постоянного поперечного сечения шириной H с боковым отверстием шириной h. Пусть по каналу движется жидкость, причем часть ее вытекает через боковое отверстие. Расход жидкости в канале до отверстия равен Q, а расход жидкости через боковое отверстие q. Найдем уравнения контура струи. Решение проведем для плоского течения при помощи конформного отображения по методу Н. Е. Жуковского (1).

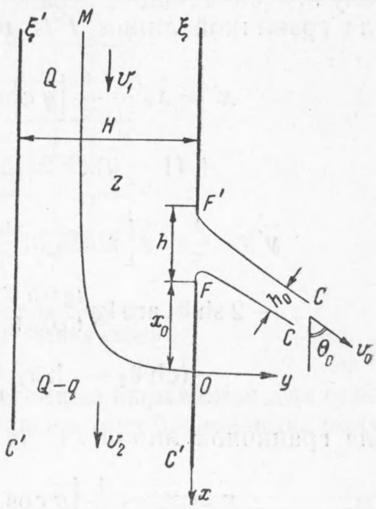


Рис. 1. Течение в канале с боковым отверстием

В качестве известного течения выберем течение в верхней полуплоскости, обусловленное двумя стоками-точками с расходом жидкости Q и $Q-q$ (рис. 2). Искомое течение будем рассматривать на плоскости переменного $z = x + iy$, а известное течение — на полуплоскости переменного $u = \xi + i\eta$.

Комплексный потенциал двух стоков-точек равен:

$$W = -\frac{q}{\pi}\ln(u-\gamma) - \frac{Q-q}{\pi}\ln(u+\gamma'),$$

где γ и γ' — абсциссы полюсов точечных стоков.

Отсюда потенциал скорости

$$\varphi = -\frac{q}{\pi}\ln\sqrt{(\xi+\gamma)^2+\eta^2} - \frac{Q-q}{\pi}\ln\sqrt{(\xi+\gamma')^2+\eta^2}.$$

Отображающей функцией является

$$\cos(\theta + i\vartheta) = \frac{1+\cos^2\nu - 2\dfrac{\omega}{u}}{\sin^2\nu},$$

где θ — угол вектора скорости с осью x; $\vartheta = \ln\dfrac{v}{v_0}$ — переменная Н. Е. Жуковского (v — произвольная скорость, v_0 — скорость в сжатом сечении струи); $\cos^2\nu = \dfrac{\omega}{\omega'}$ (ω и ω' — абсциссы точек F и F' на плоскости u).

Последняя функция для бесконечно удаленной точки в канале вверх по течению, на контуре струи и для бесконечно удаленной точки вниз по течению принимает, соответственно, следующий вид:

$$\operatorname{ch}\vartheta_1 = \frac{1+\cos^2\nu}{\sin^2\nu}; \quad \cos\theta = \frac{1+\cos^2\nu - 2\,\dfrac{\omega}{\xi}}{\sin^2\nu}; \quad \operatorname{ch}\vartheta_2 = \frac{1+\cos^2\nu + 2\,\dfrac{\omega}{\gamma'}}{\sin^2\nu}.$$

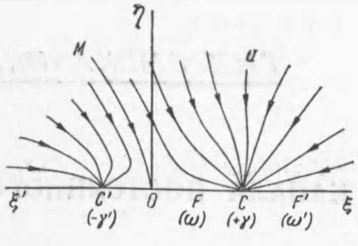


Рис. 2. Течение в верхней полуплоскости, вызванное двумя стоками-точками

Координаты контура струи определяются формулами:

$$x = \frac{1}{v_0}\int \cos\theta\, d\varphi, \quad y = \frac{1}{v_0}\int \sin\theta\, d\varphi.$$

При помощи ранее приведенных равенств найдем выражения для $\cos\theta$, $\sin\theta$ и $d\varphi$ и подставим их под знак интегралов. Затем проведем интегрирование и уточним постоянные интеграции из условия течения жидкости вблизи точек F и F'. В результате этих операций получим следующие уравнения контура струи:

для граничной линии $F'C$ $(0 \leqslant \theta' \leqslant \theta_0)$

$$\bar{x}' = \bar{x}_0' - \frac{1}{\pi}\left[\bar{q}\cos\theta_0 \ln\frac{(\cos\theta' - \cos\theta_0)(\operatorname{ch}\vartheta_1 - 1)}{(\operatorname{ch}\vartheta_1 - \cos\theta')(1-\cos\theta_0)} + (1-\bar{q})\operatorname{ch}\vartheta_2 \ln\frac{(\operatorname{ch}\vartheta_2 - \cos\theta')(\operatorname{ch}\vartheta_1 - 1)}{(\operatorname{ch}\vartheta_1 - \cos\theta')(\operatorname{ch}\vartheta_2 - 1)}\right] e^{-\vartheta_1}, \tag{1}$$

$$\bar{y}' = \frac{1}{\pi}\left\{\bar{q}\left[\sin\theta_0 \ln\frac{\operatorname{tg}0{,}5\,\theta' + \operatorname{tg}0{,}5\,\theta_0}{\operatorname{tg}0{,}5\,\theta_0 - \operatorname{tg}0{,}5\,\theta'} + (\operatorname{ch}\vartheta_1 - \cos\theta_0)\,\theta' - 2\operatorname{sh}\vartheta_1 \operatorname{arc\,tg}\frac{\operatorname{tg}0{,}5\,\theta'}{\operatorname{th}0{,}5\vartheta_1}\right] + (1-\bar{q})\left[2\operatorname{sh}\vartheta_2 \operatorname{arc\,tg}\frac{\operatorname{tg}0{,}5\,\theta'}{\operatorname{th}0{,}5\vartheta_2} - (\operatorname{ch}\vartheta_2 - \operatorname{ch}\vartheta_1)\,\theta' - 2\operatorname{sh}\vartheta_1 \operatorname{arc\,tg}\frac{\operatorname{tg}0{,}5\,\theta'}{\operatorname{th}0{,}5\vartheta_1}\right]\right\} e^{-\vartheta_1}; \tag{2}$$

для граничной линии FC $(\theta_0 \leqslant \theta \leqslant \pi)$

$$\bar{x} = \bar{x}_0 - \frac{1}{\pi}\left[\bar{q}\cos\theta_0 \ln\frac{(\cos\theta_0 - \cos\theta)(\operatorname{ch}\vartheta_1 + 1)}{(\operatorname{ch}\vartheta_1 - \cos\theta)(1+\cos\theta_0)} + (1-\bar{q})\operatorname{ch}\vartheta_2 \ln\frac{(\operatorname{ch}\vartheta_2 - \cos\theta)(\operatorname{ch}\vartheta_1 + 1)}{(\operatorname{ch}\vartheta_1 - \cos\theta)(\operatorname{ch}\vartheta_2 + 1)}\right] e^{-\vartheta_1}, \tag{3}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{\pi}\left\{\bar{q}\left[\sin\theta_0 \ln\frac{\operatorname{tg}0{,}5\,\theta + \operatorname{tg}0{,}5\,\theta_0}{\operatorname{tg}0{,}5\,\theta - \operatorname{tg}0{,}5\,\theta_0} - (\operatorname{ch}\vartheta_1 - \cos\theta)(\pi - \theta) + \operatorname{sh}\vartheta_1\left(\pi - 2\operatorname{arc\,tg}\frac{\operatorname{tg}0{,}5\,\theta}{\operatorname{th}0{,}5\vartheta_1}\right)\right] - (1-\bar{q})\left[\operatorname{sh}\vartheta_2\left(\pi - 2\operatorname{arc\,tg}\frac{\operatorname{tg}0{,}5\,\theta}{\operatorname{th}0{,}5\vartheta_2}\right) - (\operatorname{ch}\vartheta_2 - \operatorname{ch}\vartheta_1)(\pi - \theta) - \operatorname{sh}\vartheta_1\left(\pi - 2\operatorname{arc\,tg}\frac{\operatorname{tg}0{,}5\,\theta}{\operatorname{th}0{,}5\vartheta_1}\right)\right]\right\} e^{-\vartheta_1}. \tag{4}$$

При этом

$$\vartheta_1 = \ln\frac{\bar{q}}{\varepsilon\bar{h}}, \quad \vartheta_2 = \vartheta_1 - \ln(1-\bar{q}), \tag{5}$$

где

$$\bar{x} = \frac{x}{H}; \quad \bar{y} = \frac{y}{H}; \quad \bar{q} = \frac{q}{Q}; \quad \bar{h} = \frac{h}{H}; \quad \varepsilon = \frac{h_0}{H},$$

а x_0 и x_0' — абсциссы точек F и F' на плоскости z.

Неизвестные в этих уравнениях — коэффициент сжатия струи ε и угол истечения струи θ_0, т. е. угол между направлением струи в сжатом сечении и стенкой канала, могут быть найдены на основании следующих равенств:

$$\frac{q}{v_0}\sin\theta_0 = x - x', \quad \frac{q}{v_0}\cos\theta_0 = y' - y$$

при условии $\theta = \theta' = \theta_0$.

Переходя к безразмерным величинам, будем иметь:

$$\bar{q}e^{-\vartheta_1}\sin\theta_0 = (\bar{x} - \bar{x}')_{\theta=\theta'=\theta_0}, \quad \bar{q}e^{-\vartheta_1}\cos\theta_0 = (\bar{y}' - \bar{y})_{\theta=\theta'=\theta_0}.$$

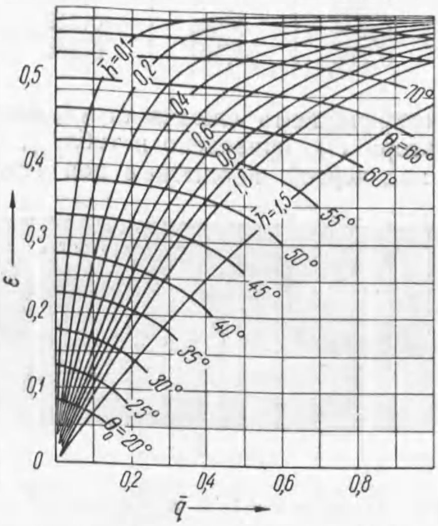


Рис. 3. Номограмма для определения коэффициента сжатия и угла истечения струи

Подставляя в эти уравнения ранее найденные выражения для относительных координат контура струи и проводя преобразования, получим:

$$\varepsilon = \frac{\bar{q}}{\bar{h}}\,\frac{\cos\theta_0}{1 - 0{,}5\,\bar{q}}, \tag{6}$$

$$\bar{h} = \frac{1}{\pi}\left[\pi\bar{q}\sin\theta_0 - \bar{q}\cos\theta_0\ln\frac{1+\cos\theta_0}{1-\cos\theta_0} + \frac{(1-0{,}5\bar{q})^2+\cos^2\theta_0}{(1-0{,}5\,\bar{q})\cos\theta}\ln\frac{1-0{,}5\bar{q}+\cos\theta_0}{1-0{,}5\bar{q}-\cos\theta_0} - \frac{(1-0{,}5\,\bar{q})^2+(1-\bar{q})^2\cos^2\theta_0}{(1-0{,}5\,\bar{q})\cos\theta_0}\ln\frac{1-0{,}5\,\bar{q}+(1-\bar{q})\cos\theta_0}{1-0{,}5\,\bar{q}-(1-\bar{q})\cos\theta_0}\right]\frac{\cos\theta_0}{1-0{,}5\,q}. \tag{7}$$

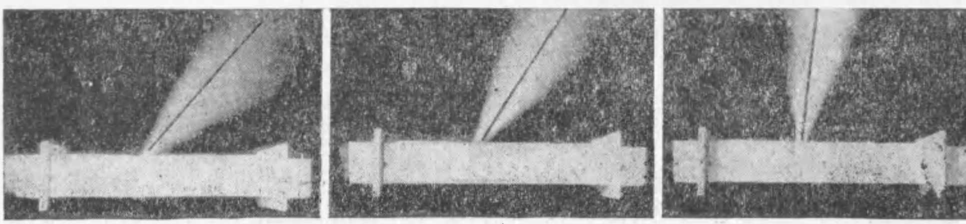
В частном случае при угле истечения $\theta_0 = \pi/2$ по формулам (6) и (7) получаем, что относительная ширина отверстия $\bar{h} = 0$, а коэффициент сжатия струи $\varepsilon = \pi/(\pi + 2)$. Таким образом, при истечении жидкости из канала бесконечно большой ширины ($H = \infty$) коэффициент сжатия струи равен 0,61, а струя вытекает в нормальном направлении к стенке канала. Это решение совпадает с общеизвестным решением задачи на истечение жидкости из весьма большого сосуда, в дне которого устроено щелевое отверстие.

Для облегчения определения коэффициента сжатия и угла истечения струи на рис. 3 приводится номограмма, построенная на основании последних двух формул.

Таблица 1

$\bar{q}$ \ $\bar{h}$	0,15	0,32	0,62	1,03	1,51	1,98
0,2	0,540	0,414	0,278	0,186	0,128	0,100
	0,535	0,400	0,279	0,185	0,127	0,101
0,4	0,590	0,544	0,445	0,330	0,242	0,196
	0,616	0,541	0,440	0,331	0,241	0,196
0,6	0,602	0,580	0,524	0,436	0,342	0,287
	0,653	0,597	0,522	0,433	0,335	0,282
0,8	0,606	0,594	0,566	0,506	0,422	0,370
	0,675	0,615	0,560	0,500	0,406	0,356
1,0	0,609	0,604	0,584	0,546	0,480	0,432
	0,714	0,660	0,597	0,544	0,461	0,411

Сопоставление коэффициента сжатия струи, определенного аналитически и опытами автора (2), приведено в табл. 1. В таблице расчетные данные приведены над чертой, а опытные под чертой.



а б в

Рис. 4. Факелы истечения из щели $h = 0{,}32$. $а - \bar{q} = 0{,}162$; $б - \bar{q} = 0{,}240$; $в - \bar{q} = 1{,}0$

Насколько удачно расчетное значение угла истечения совпадает с фактическим, видно на фото рис. 4. Здесь во всех трех случаях направление скорости (черная линия) совпало с направлением оси факела.

Поступило
27 X 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. Е. Жуковский, Видоизменение метода Кирхгоффа для определения движения жидкости в двух измерениях при постоянной скорости, данной на неизвестной линии тока, Избр. соч., 1, 1948. [2] В. Н. Талиев, Сборн. Вопросы отопления и вентиляции, Тр. ЦНИПС, 1951.