Доклады Академии Наук СССР
1954. Том XCIV, № 4

МАТЕМАТИКА

Ю. Г. РЕШЕТНЯК

ИЗОТЕРМИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ В МНОГООБРАЗИЯХ ОГРАНИЧЕННОЙ КРИВИЗНЫ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 30 XI 1953)

Понятие двухмерного многообразия ограниченной кривизны введено А. Д. Александровым в ([1-4]).

Определим на комплексной плоскости z некоторую метрику ρ_λ посредством линейного элемента $\lambda(z)|dz|^2=\lambda(z)(dx^2+dy^2)$, где $\lambda(z)\geqslant 0$ — произвольная функция, измеримая на каждом прямолинейном отрезке. Именно, длиной произвольной ломаной $L=z(t)$ на плоскости z в метрике ρ_λ назовем число

$$s_\lambda(L)=\int\limits_L \sqrt{\lambda(z)}\,|dz|.$$

Расстоянием в этой метрике между двумя точками A и B назовем величину $\rho_\lambda(A, B)=\inf\limits_{A\in L,\, B\in L} s_\lambda(L)$.

Теорема. *Пусть R — многообразие ограниченной кривизны* ([1]) *и M — гомеоморфная замкнутому кругу область в R, граница которой имеет поворот ограниченной вариации. Тогда в области M можно ввести координаты x и y (x и y изменяются в ограниченной плоской области D) так, что ее метрика в этих координатах в указанном выше смысле будет определяться линейным элементом $\lambda(z)(dx^2+dy^2)$. При этом*

$$\lambda(z)=\exp\left\{\frac{1}{\pi}\iint\limits_D \ln\frac{1}{|z-\zeta|}\,\omega(dE_\zeta)+h(z)\right\}, \tag{1}$$

где $z=x+iy$; $\omega(E)$ — кривизна множества $E\subset M$; dE_ζ — элемент плоскости; интегрирование производится по ζ и интеграл понимается в смысле Лебега — Стилтьеса; $h(z)$ — вещественная гармоническая функция в области D.

Доказательство теоремы основано на следующих леммах.

Лемма 1. *Во всяком гомеоморфном плоскости многограннике T с полной метрикой и кривизной меньшей 2π можно ввести координаты x и y, область изменения которых есть вся плоскость, так, что метрика многогранника в этих координатах будет определяться линейным элементом $\lambda(z)(dx^2+dy^2)$, где*

$$\ln\lambda(z)=\sum_{j=1}^{m}\frac{\omega_j}{\pi}\ln\frac{1}{|z-z_j|}, \tag{2}$$

$z_1, z_2, \ldots, z_m$ — точки плоскости, отвечающие вершинам T, а ω_j $(j=1, 2, \ldots, m)$ — кривизна в вершине z_j.

Искомая система координат получается в результате осуществления кусочно-конформного отображения многогранника T на плоскость ([5]).

Лемма 2. *Пусть $\omega_1(E), \omega_2(E), \ldots, \omega_n(E)$ — последовательность вполне аддитивных функций множеств на плоскости, равных нулю для множеств, лежащих вне круга $|z| < A$, и пусть $\omega_n(E)$ слабо сходятся к функции $\omega_0(E)$, а их вариации слабо сходятся к функции $\varphi(E)$. Пусть, далее,*

$$\lambda_n(z) = \exp\left\{\frac{1}{\pi}\iint \ln\frac{1}{|z-\zeta|}\,\omega_n(dE_\zeta)\right\}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{3}$$

Тогда при $n \to \infty$ метрики ρ_{λ_n} равномерно сходятся к метрике ρ_{λ_0} на всяком ограниченном замкнутом множестве F, не содержащем точек X с $\varphi(X) \geqslant 2\pi$.

Пусть L — простая замкнутая кривая на плоскости, охватывающая начало координат, лежащая в круге $|z| \leqslant 1$ и содержащая точки z с $|z| = 1$.

Рассмотрим всевозможные метрики ρ_λ, где λ задается формулами (2), причем $\sum\limits_{j=1}^{m} |\omega_j| < K < \infty$, $\sum\limits_{j=1}^{m} \omega_j = 2\pi\gamma < 2\pi$ и $|z_j| \leqslant 1$, $j = 1, 2, \ldots, m$. Пусть $l(K, \gamma, L)$ — точная нижняя граница длин кривой L в этих метриках. (Длина произвольной кривой в метрике понимается здесь как предел длин в метрике вписанных в эту кривую ломаных при условии, что максимум диаметров дуг, на которые кривая разбивается их вершинами, стремится к нулю.)

Лемма 3. *Если $l(K, \gamma) = \inf\limits_{L} l(K, \gamma, L)$, где* infimum *берется по всем кривым L, обладающим перечисленными свойствами, то $l(K, \gamma) > 0$.*

Действительно, если $l(K, \gamma) = 0$, то при помощи леммы 2 можно построить метрику ρ_λ, где λ дается формулой (1) с $h(z) = 0$, в которой расстояние между какими-то двумя различными точками равно нулю. Легко показать, что это, однако, невозможно.

Лемма 4. *Пусть λ дается формулой (2) и L — замкнутая кривая, внутри которой находятся начало координат и точки $z_1, z_2, \ldots, z_m$.*

Если $\sum\limits_{j=1}^{m} |\omega_j| < K$, $\sum\limits_{j=1}^{m} \omega_j = 2\pi\gamma < 2\pi$, то

$$s_\lambda(L) \geqslant l(K, \gamma) R^{1-\gamma},$$

где $R = \max\limits_{z \in L} |z|$.

Доказательство теоремы при помощи сформулированных лемм осуществляется следующим образом. Согласно ([1]) можно построить последовательность многогранников $M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots$, гомеоморфных кругу, такую, что метрики этих многогранников сходятся равномерно к метрике области M, причем абсолютные кривизны многогранников M_n и вариации поворотов их границ ограничены в совокупности. Пусть T — часть плоскости, являющаяся внешностью круга, периметр которого равен длине границы области M. Отобразив изометрически границу T на границу M и отождествив соответствующие точки, получим многообразие M', гомеоморфное плоскости. Аналогичным образом к многограннику M_n приклеиваем внешность правильного n-угольника. Получится гомеоморфный плоскости многогранник M_n', метрика которого полна и при $n \to \infty$ сходится равномерно к метрике многообразия M_n. По лемме 1 многогранник M'_n можно отобразить на плоскость так, что его метрика будет определяться в плоскости линейным элементом $\lambda_n(z)(dx^2+dy^2)$, где $\lambda_n(z)$ дается формулой (3). Функции $\omega_n(E)$ здесь функции точечных нагрузок, их вариации ограничены в совокупности. Параллельным переносом осей координат можно добиться, что плоские кривые L_n — образы границ многогранников M_n — будут охватывать начало координат. Пусть $s_{\lambda_n}(L_n)$ — длина границы M_n. Величины $s_{\lambda_n}(L_n)$ ограничены: $s_{\lambda_n}(L_n) \leqslant A < \infty$ для всех n. Пусть $R_n = \max\limits_{z \in L_n} |z|$. На основании лемм 3 и 4

$$R_n \leqslant \frac{A}{l(K, \gamma)} < \infty,$$

где K — верхняя граница абсолютных кривизн многогранников M_n. Таким образом, кривые L_n заключены все внутри фиксированного круга, и потому из функций $\omega_n(E)$ можно выбрать подпоследовательность $\{\omega_{n_i}(E)\}$, слабо сходящуюся к некоторой функции $\omega_0(E)$. По лемме 2 метрики $\rho_{\lambda_{n_i}}$ сходятся к метрике ρ_{λ_0}, где

$$\lambda_0(z) = \exp\left\{\frac{1}{\pi}\iint \ln\frac{1}{|z-\zeta|}\,\omega_0(dE_\zeta)\right\}.$$

С другой стороны, эти метрики равномерно сходятся к метрике многообразия M. Отсюда следует, что метрика ρ_{λ_0} совпадает с метрикой M. Попутно устанавливается также, что $\omega_0(E)$ есть кривизна множества E, и теорема доказана.

Поступило
7 XI 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Д. Александров, ДАН, **60**, № 9 (1948). [2] А. Д. Александров, ДАН, **63**, № 4 (1948). [3] А. Д. Александров, ДАН, **69**, № 6 (1949). [4] А. Д. Александров, ДАН, **70**, № 4 (1950). [5] К. Каратеодори, Конформное отображение, 1934.