

А. И. ПОЛАК

**О НЕКОТОРЫХ АНАЛОГИЯХ В СТРОЕНИИ
ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ
И НЕПРЕРЫВНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ КОМПАКТОВ**

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 10 XI 1953)

Как известно, всякая равномерно сходящаяся в области G последовательность f_n голоморфных функций обладает следующим свойством: если предельная функция $f(z)$ отлична от постоянного, то для достаточно большого n функция $f_n(z) - w$ в области G , целиком с границей лежащей в G , имеет столько же нулей, сколько и функция $f(z) - w$. При этом каждый нуль считается столько раз, какова его кратность*. Очевидно, что в случае, когда все нули однократны, начиная с некоторого n число точек, в которых $f_n(z)$ принимает в области G значение w , становится равным числу точек, в которых это же значение принимает $f(z)$.

Как показывает простейший пример, это утверждение, вообще говоря, неверно для действительных функций, даже если они дифференцируемы любое число раз. Поэтому может казаться, что вышеуказанное свойство равномерно сходящихся последовательностей возникает лишь исключительно благодаря тем усложнениям структуры функций, которые вносит требование о существовании производной в каждой точке области. Такое мнение было бы ошибочным. Оказывается, что если на произвольные непрерывные функции комплексного переменного наложить локальные условия, касающиеся, как и понятие производной, поведения функции в точках области, но конструктивно несравненно более простые, нежели дифференцируемость, то немедленно возникают известные аналогии с содержанием цитированной теоремы. Правда, при этом необходимо рассматривать функции уже не в открытых, а замкнутых ограниченных областях. Немедленно обнаруживается сходство такое же, как в этой теореме, между поведением данной функции и поведением функции, достаточно хорошо приближающей данную в процессе равномерной аппроксимации.

Теорема 1. Пусть последовательность непрерывных функций $f_n(z)$ равномерно сходится к функции $f(z)$ в замкнутой ограниченной области \bar{G} . Кроме того, пусть система $\{f_n(x)\}$ обладает следующими локальными свойствами:

1) существует такое $\delta(z)$, что в δ -окрестности любой точки $z \in \bar{G}$ каждая из функций f_n однолистка;

2) образ любой ε -окрестности точки z при отображениях f_n покрывает некоторую η -окрестность точки $w_n = f_n(z)$, причем η зависит только от z и ε , но не зависит от f_n .

* Так называемая теорема Гурвица (1).

Тогда, если ω есть значение $f(z)$ и каждой $f_n(z)$ и число точек, в которых $f(z)$ принимает значение ω , равно целому числу k , то найдется такое N , что для всех $n > N$ число точек, в которых $f_n(z)$ принимает то же значение ω , также равно k .

Эта теорема есть частный случай значительно более общего предложения из области непрерывных отображений компактных пространств. Формулировке теоремы предположим одно замечание.

Если система непрерывных отображений f_n компакта X в метрическое пространство R удовлетворяет условию 2) теоремы 1, то мы будем говорить, что образы окрестностей точки x компакта при отображениях f_n равномерно медленно убывают вместе с окрестностями этой точки.

Теорема 2. Пусть последовательность непрерывных отображений f_n компакта X в метрическое пространство R сходится равномерно к отображению f и, кроме того, отображения f_n связаны между собой условиями:

1) существует такое $\delta(x)$, что в δ -окрестности каждой точки $x \subset X$ каждое отображение f_n взаимно-однозначно;

2) образы $f_n(U)$ окрестностей U точки x равномерно медленно убывают с убыванием самих окрестностей U .

Тогда, если полные прообразы точки $y \subset R$ при отображениях f и f_n не пусты и, кроме того, полный прообраз при отображении f состоит из k точек, то найдется такое N , что для всех $n > N$ полные прообразы точки y при отображениях f_n состоят также ровно из k точек.

Доказательство. Предположим, что найдутся как угодно большие номера N такие, что число точек в полных прообразах $f_n^{-1}(y)$ не равно числу точек в прообразе $f^{-1}(y)$. Значит, можно выделить из последовательности $\{f_n^{-1}(y)\}$ подпоследовательность $\{f_m^{-1}(y)\}$ такую, что либо для всех m каждое $f_m^{-1}(y)$ содержит более чем k точек, либо каждое $f_m^{-1}(y)$ содержит менее чем k точек.

1. Пусть каждое $f_m^{-1}(y)$ содержит более чем k точек. Верхний предел $\text{lt} f_m^{-1}(y)$ существует и, очевидно, принадлежит $f^{-1}(y)$. В самом деле, предполагая противное, мы тотчас построим последовательность точек $\{x_m\}$ такую, что $\rho[f_m(x_m), f(x_m)]$ больше некоторого числа ε для всех m . А это противоречит условию равномерной сходимости f_n . Выделим из $\{f_m^{-1}(y)\}$ сходящуюся подпоследовательность $\{f_l^{-1}(y)\}$, что возможно вследствие компактности X . Пусть ε — число, удовлетворяющее следующим условиям: ε меньше любого $\delta(x')$, где x' — точки множества $f^{-1}(y)$; ε -окрестности точек $f^{-1}(y)$ не пересекаются между собой.

Так как $\rho[f_l^{-1}(y), F] \rightarrow 0$ вместе с l , где $F = \text{lt} f_l^{-1}(y) \subset f^{-1}(y)$, а ρ есть отклонение ⁽⁴⁾ соответствующих множеств, то найдется такое l_0 , что $\rho[f_{l_0}^{-1}(y), f^{-1}(y)] < \varepsilon$. Поэтому каждая точка из $f_{l_0}^{-1}(y)$ окажется в ε -окрестности некоторой точки из $f^{-1}(y)$. Но $f^{-1}(y)$ состоит из k точек, а $f_{l_0}^{-1}(y)$ более чем из k точек. Значит, в ε -окрестности некоторой точки из $f^{-1}(y)$ найдутся по крайней мере две точки, отображающиеся в y при $f_{l_0}(x)$, что противоречит условию 1) нашей теоремы.

2. Предположим, что число точек в каждом $f_m^{-1}(y)$ меньше, чем k . Пусть $\{f_l^{-1}(y)\}$ — сходящаяся подпоследовательность с пределом $F = \text{lt} f_l^{-1}(y) \subset f^{-1}(y)$. Очевидно, что F состоит менее чем из k точек. Действительно, предполагая противное, выберем ε так, чтобы ε -окрестности точек из $f^{-1}(y)$ не пересекались. Найдется такое l_0 , что

в ε -окрестности каждой точки $f^{-1}(y)$ лежит хотя одна точка из $f_l^{-1}(y)$. Значит, число точек в $f_l^{-1}(y)$ не менее k , что невозможно.

Пусть x_0 — точка $f^{-1}(y)$, не принадлежащая F . Найдется ε такое, что $U_\varepsilon(x_0)$ не пересекается ни с одним $f_l^{-1}(y)$. Образ $U_\varepsilon(x_0)$ при $f_l(x)$ содержит η -окрестность точки $f_l(x_0)$, где η одно и то же для всех l . Так как $f_l(x_0) \rightarrow f(x_0) = y$, то для некоторого l_0 $\rho[f_{l_0}(x_0), y]$ будет меньше η . Значит, $y \in U_\eta[f_{l_0}(x_0)] \subset f_{l_0}[U_\varepsilon(x_0)]$, т. е. в $U_\varepsilon(x_0)$ найдется точка из $f_{l_0}^{-1}(y)$, что невозможно.

Теорема доказана.

Заметим, что условия 1), 2) в нашей теореме не могут быть устранены. Можно построить равномерно сходящиеся последовательности функций действительного или комплексного переменного, которые, не удовлетворяя хотя бы одному из условий 1), 2) нашей теоремы, не обладают соответствующим строением непрерывных разбиений, о котором говорится в теореме.

Одним из таких примеров может служить, например, равномерная аппроксимация функции $y = |x|$ такими функциями $\varphi_n(x)$: при $-1 \leq x \leq 0$ $\varphi_n = -x$; при $0 \leq x \leq 1$ $\varphi_n = \frac{n-1}{n}x$. Очевидно, что условие 2) нашей теоремы не выполнено, и последовательность не обладает той аналогией в строении предельной и аппроксимирующей функций, о которой говорится в теореме. С другой стороны, можно, очевидно, функцию $y = x$ равномерно аппроксимировать последовательностью функций, которые в сколь угодно малых интервалах не будут взаимно-однозначны. В этом случае число точек, в которых $f_n(x)$ принимают данное значение y , может оставаться все время больше числа точек, в которых это значение принимает $f(x)$.

Установленная теорема позволяет более глубоко проникнуть в природу равномерно сходящейся последовательности аналитических функций, нежели это осуществляет теорема Гурвица. Теорема 2 устанавливает тот, по крайней мере, относительный минимум ограничений, наложение которых на аппроксимирующие функции позволяет заключить о совпадении для достаточно большого n числа точек, в которых $f_n(z)$ принимает фиксированное значение w , с числом точек, в которых это значение принимает $f(z)$.

Теорема Гурвица при доказательстве неизбежности такого совпадения, даже в том случае, когда речь идет о числе различных точек, а не о кратных нулях функций $f_n(z) - w$, все равно существенно опирается на предположение об аналитичности всех функций в области G .

Оказывается, что число точек, в которых $f_n(z)$ принимает значение w , для достаточно большого n неизбежно совпадает с числом точек, в которых $f(z)$ принимает то же значение w , если предположить всего-навсего аналитичность, однолиственность и нормированность функций $f_n(z)$ в некоторых окрестностях как раз тех точек, для которых $f(z) = w$.

Это обстоятельство устанавливается следующей теоремой.

Теорема 3. Пусть $\{f_n(z)\}$ — последовательность непрерывных в \bar{G} , но, вообще говоря, неаналитических функций, равномерно сходящаяся в замкнутой ограниченной области \bar{G} к функции $f(z)$. Пусть M — множество тех точек, в которых $f(z)$ принимает значение w , состоит ровно из k точек.

Тогда, если выполнены следующие условия:

- 1) w есть значение каждой функции $f_n(z)$;
- 2) существует для каждого $z_0 \in M$ такая окрестность $U(z_0)$, что

в ней каждая функция $f_n(z)$ есть функция аналитическая и однолистная, причем $|f'_n(z_0)| = 1$, то найдется такое N , что для каждого $n > N$ число точек, в которых $f_n(z)$ принимает значение w , тоже равно k .

Доказательство. Известная теорема Кёбе^(2,3) гласит: всякая функция, аналитическая и однолистная в круге $|z| < 1$, определенная рядом $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$, отображает круг $|z| < 1$ на область, которая покрывает круг $w < 1/4$.

Применяя только простейшие преобразования параллельного переноса, подобия, вращения в плоскостях z и w , можно обобщить теорему Кёбе. Именно, всякая функция, аналитическая, однолистная и разлагающаяся в ряд в $f(z) = (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 + \dots$ в круге радиуса R с центром в точке z_0 , отображает этот круг на область, покрывающую круг с центром в точке $w_0 = f(z_0)$ постоянного радиуса r , не зависящего от f .

Теперь ясно, что выполнение условия 2) в теореме 3 немедленно влечет такие условия: 1) существует δ такое, что в каждой точке $z \subset M = f^{-1}(w)$ каждая f_n однолистка; 2) образы каждой достаточно малой окрестности точки $z \subset M$ при отображениях $f_n(z)$ покрывают η -окрестность точки $w_n = f_n(z)$, где η зависит только от величины окрестности точки z , но не от f_n . Таким образом, наличие существования условий 1), 2) в теореме 2.

Последнее замечание доказывает теорему.

Поступило
6 XI 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ А. И. Маркушевич, Теория аналитических функций, 1950. ² Г. М. Голузин, Усп. матем. наук, в. 6, 26 (1939). ³ И. И. Привалов, Введение в теорию функций комплексного переменного, 1945. ⁴ Ф. Хаусдорф, Теория множеств, 1937.