Доклады Академии Наук СССР
1954. Том XCIV, № 4

МАТЕМАТИКА

Член-корреспондент АН СССР Ю. В. ЛИННИК

ОБ УСТОЙЧИВЫХ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ЗАКОНАХ С ПОКАЗАТЕЛЕМ МЕНЬШИМ ЕДИНИЦЫ

Характеристические функции устойчивых вероятностных законов имеют логарифмы, выражаемые известной формулой [1]

$$\ln f(t) = i\gamma t - c\,|t|^{\alpha}\{1 + i\beta \operatorname{sgn} t\,\omega(t, \alpha)\},$$

где $\omega(t, \alpha) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\alpha$, если $\alpha \neq 1$, и $\omega(t, 1) = \frac{2}{\pi}\ln|t|$; γ — любое реальное число; $-1 \leqslant \beta \leqslant 1$; $0 < \alpha \leqslant 2$; $c \geqslant 0$.

Введя линейное преобразование соответствующей случайной величины, можно сделать $\gamma = 0$, $c = 1$. При этом случай $\beta = \pm 1$ в особенности интересен для теории случайных величин типа «циклов» [1,2]. Когда показатель $\alpha < 1$ и $\beta = -1$, соответствующая характеристической функции $f(t)$ плотность вероятности $p(x, \alpha; -1)$ исчезает при $x \leqslant 0$, при $\alpha < 1$ и $\beta = +1$; $p(x, \alpha; +1)$ исчезает при $x \geqslant 0$.

А. Н. Колмогоровым поставлена задача выяснения асимптотического поведения $p(x, \alpha; -1)$ и $p(x, \alpha; +1)$ в окрестности $x = 0$.

В настоящей заметке выясняется этот вопрос и даются некоторые новые сведения о функциях $p(x, \alpha; -1)$ и $p(x, \alpha; +1)$.

Теорема 1. *В окрестности $x = 0$ имеет место следующее асимптотическое представление при $x > 0$:*

$$p(x, \alpha; -1) = A(\alpha)\, x^{-(2-\alpha)/2(1-\alpha)} E(x)\,(1 + \Delta(x)), \tag{1}$$

где

$$A(\alpha) = \frac{\alpha^{1/2(1-\alpha)}}{\sqrt{2\pi}\,(1-\alpha)^{1/2}}\left(\cos\frac{\pi}{2}\alpha\right)^{-1/2(1-\alpha)},$$

$$E(x) = \exp\left(-\alpha^{\alpha/(1-\alpha)}(1-\alpha)\left(\cos\frac{\pi}{2}\alpha\right)^{-1/(1-\alpha)} x^{-\alpha/(1-\alpha)}\right),$$

$$|\Delta(x)| \leqslant B(\varepsilon)\, x^{\alpha/2(1-\alpha)-\varepsilon}, \tag{2}$$

где $\varepsilon > 0$ — произвольно малая константа и $B(\varepsilon)$ — ограниченная функция в любом замкнутом сегменте, не содержащем 0.

Для $p(x, \alpha; +1)$ имеет место такое же представление с заменой x на $-x$.

Для любой производной $\frac{d^n}{dx^n}p(x, \alpha; -1)$ имеем:

$$\frac{d^n}{dx^n}p(x, \alpha; -1) = A(\alpha)\frac{d^n}{dx^n}\{x^{-(2-\alpha)/2(1-\alpha)}E(x)\}(1 + \Delta_n(x)), \tag{3}$$

где $\Delta_n(x)$ имеет оценку (2).

Аналитическая природа $p(x, \alpha; -1)$ поясняется следующей теоремой:

Теорема 2. *При $x>0$ имеем разложение*:

$$p(x, \alpha; -1) = \frac{1}{x}\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{-\alpha m},$$

где a_m — действительные числа и ряд $Q(z) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} a_m z^m$ всюду сходится и изображает целую функцию.

Аналогичное разложение имеет место и для $p(x, \alpha; +1)$.*

Если α рационально, $\alpha = a/q$, где a/q — несократимая дробь, то $p(x, \alpha; -1)$ связано с решениями некоторого однородного линейного дифференциального уравнения порядка q. Для простейшего случая $\alpha = 1/q$ имеет место теорема:

Теорема 3. *Полагая $\xi = x^{-\alpha}/\cos\frac{\pi}{2}\alpha$ и $\chi(\xi) = 2\pi x\, p(x, \alpha; -1)$ при $\alpha = 1/q$, где q — целое число, найдем, что функция*

$$\underbrace{\int_{\xi}^{\infty} d\xi \ldots \int_{\xi}^{\infty}}_{q-1 \text{ раз}} d\xi\, \chi(\xi) = r(\xi)$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d^{q-1} r(\xi)}{d\xi^{q-1}} + \frac{(-1)^q}{q}\xi r(\xi) = 0. \tag{4}$$

Изложим вкратце доказательства теорем 1 и 2.

Исходя из легко получаемого представления

$$p(x, \alpha; -1) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} \exp\left(itx - t^{\alpha} e^{\frac{\pi}{2}\alpha i}\left(\cos\frac{\pi}{2}\alpha\right)^{-1}\right) dt, \tag{5}$$

делаем замену $\xi = x^{-\alpha}/\cos\frac{\pi}{2}\alpha$ при $x>0$ и получаем:

$$p(x, \alpha; -1) = \frac{1}{\pi x}\operatorname{Re}\psi(\xi); \quad \psi(\xi) = \int_0^{\infty} \exp\left(iv - v^{\alpha} e^{\frac{\pi}{2}\alpha i}\xi\right) dv.$$

Проведя в плоскости комплексного переменного $v = re^{i\varphi}$ разрез по всей отрицательной действительной оси и измеряя угол φ от $-\pi$ до π, вводим функцию:

$$\chi(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(iv - v^{\alpha} e^{\frac{\pi}{2}\alpha i}\xi\right) dv, \tag{6}$$

где интеграл идет по нижнему берегу разреза ($\varphi = -\pi$) с обходом 0 и далее по положительной оси $\varphi = 0$. Убеждаемся, что $\chi(\xi) = \psi(\xi) + \overline{\psi(\xi)} = 2\operatorname{Re}\psi(\xi)$ и что $p(x, \alpha; -1) = \frac{1}{2\pi x}\chi(\xi)$. Далее разыскиваем асимптотику $\chi(\xi)$ при $\xi \to \infty$, откуда легко перейти к асимптотике $p(x, \alpha; -1)$ при $x \to +0$. Полагая $f(v) = iv - v^{\alpha} e^{\frac{\pi}{2}\alpha i}\xi$, разыскиваем «точку перевала» v_0 из уравнения $f'(v_0) = 0$. Находим: $v_0 = \alpha^{1/(1-\alpha)}\xi^{1/(1-\alpha)} e^{-i\frac{\pi}{2}}$. «Контур перевала» имеет довольно сложный вид. В окрестности v_0 он весьма близок к окружности $r = r_0 = \alpha^{1/(1-\alpha)}\xi^{1/(1-\alpha)}$. Ввиду этого

* Как сообщено автору Б. В. Гнеденко, теорема 2 была получена ранее А. В. Скороходом.

вводим полуокружность L_0: $r=r_0$; $-\pi \leqslant \varphi \leqslant 0$, проходящую через точку перевала, и заменяем контур в (6) контуром $L=L^-+L_0+L^+$, где L^- — нижний берег разреза от $-\infty$ до $-r_0$; L_0 — наша полуокружность; L^+ — отрезок положительной оси от r_0 до ∞. Имеем:

$$\chi(\xi)=\int_L \exp f(v)\,dv. \tag{7}$$

Полагая $\varphi+\frac{\pi}{2}=\psi$ на полукруговом контуре L_0, находим: $f(v)= -\xi^{1/(1-\alpha)}\alpha^{1/(1-\alpha)}(\alpha^{-1}e^{i\psi\alpha}-e^{i\psi})$. Легко убеждаемся, что $|\operatorname{Re} f(v)|$ имеет минимум при $\psi=0$, и монотонно возрастает при изменении ψ от 0 до $\pi/2$ или от 0 до $-\pi/2$. Вводя малое положительное число η_0, легко убеждаемся, что

$$\int_{L_0}\exp f(v)\,dv=\int_{L_{00}}\exp f(v)\,dv+B\exp\left(-\alpha^{\alpha/(1-\alpha)}(1-\alpha)\,\xi^{1/(1-\alpha)}-q(\alpha)\,\xi^{\eta_0}\right), \tag{8}$$

где L_{00} — контур: $r=r_0$; $|\psi|\leqslant \xi^{-1/2(1-\alpha)+\eta_0}$; $q(\alpha)>0$; B — ограниченное число (в дальнейшем не всегда одно и то же). Разлагая $f(v)$ в ряд по степеням ψ, находим на контуре L_{00}

$$f(v)=\exp\Big(-\alpha^{\alpha/(1-\alpha)}(1-\alpha)\,\xi^{1/(1-\alpha)}-$$
$$-\frac{1}{2}\xi^{1/(1-\alpha)}\frac{(1-\alpha)^2}{\alpha}\alpha^{1/(1-\alpha)}\psi^2+B\xi^{-1/2(1-\alpha)+3\eta_0}\Big).$$

Вводя $dv=e^{i\psi}d\psi$, получаем после элементарных подсчетов:

$$\int_{L_{00}}\exp f(v)\,dv=\sqrt{2\pi}\frac{\alpha^{1/2(1-\alpha)}}{(1-\alpha)^{1/2}}\xi^{1/2(1-\alpha)}\exp\left(-\alpha^{\alpha/(1-\alpha)}(1-\alpha)\,\xi^{1/(1-\alpha)}\right)\times$$
$$\times\left[1+B\xi^{-1/2(1-\alpha)+3\eta_0}\right]. \tag{9}$$

Далее, легко убеждаемся, что для интегралов по L^- и L^+ имеет место оценка второго члена (8) и, стало быть, для $\chi(\xi)$ — выражение (9).

Подстановки $p(x,\alpha;\,-1)=\frac{1}{2\pi x}\chi(\xi)$; $\xi=\dfrac{x^{-\alpha}}{\cos\frac{\pi}{2}\alpha}$ приводят к выражению (1), что и доказывает теорему 1.

Для доказательства теоремы 2 обращаемся к формуле (5) и в выражении

$$\psi(\xi)=\int_0^\infty \exp\left(iv-v^\alpha e^{\frac{\pi}{2}\alpha i}\xi\right)dv$$

поворачиваем контур $(0\ldots\infty)$ на угол $\varphi_0=\frac{\pi}{4}(1-\alpha)$ против часовой стрелки. Это убеждает нас, что $\psi(\xi)$ — целая функция ξ, и из формулы $p(x,\alpha;\,-1)=\frac{1}{\pi x}\operatorname{Re}\psi(\xi)$ следует теорема 2.

Теорема 3 проверяется непосредственно.

Поступило
7 XII 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. В. Гнеденко, А. Н. Колмогоров, Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, 1949. [2] W. Feller, Trans. Am. Math. Soc., 97, № 1, 98 (1949).