Доклады Академии Наук СССР
1954. Том XCIV, № 4

МАТЕМАТИКА

П. И. КУЗНЕЦОВ, Р. Л. СТРАТОНОВИЧ и В. И. ТИХОНОВ

КВАЗИМОМЕНТНЫЕ ФУНКЦИИ В ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 10 XII 1953)

Описание случайного процесса $\xi(t)$ системой квазимоментных функций $b_p(t_1, \ldots, t_p)$ $(p = 1, 2, \ldots)$ имеет ряд преимуществ перед описанием при помощи корреляционных $k_p(t_1, \ldots, t_p)$ или моментных $m_p(t_1, \ldots, t_p)$ функций. Указанные функции суть симметричные функции своих аргументов, определяемые равенствами

$$f_n(u_1, \ldots, u_n;\ t_1, \ldots, t_n) = \exp\left\{\sum_{p=1}^{\infty} \frac{i^p}{p!} \sum_{\alpha_1, \ldots, \alpha_p=1}^{n} k_p(t_{\alpha_1}, \ldots, t_{\alpha_p}) u_{\alpha_1} \ldots u_{\alpha_p}\right\} =$$

$$= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{i^p}{p!} \sum_{\alpha_1, \ldots, \alpha_p=1}^{n} m_p(t_{\alpha_1}, \ldots, t_{\alpha_p}) u_{\alpha_1} \ldots u_{\alpha_p} =$$

$$= \exp\left\{i \sum_{\alpha=1}^{n} s(t_\alpha) u_\alpha + \frac{i^2}{2} \sum_{\alpha_1, \alpha_2=1}^{n} r(t_{\alpha_1}, t_{\alpha_2}) u_{\alpha_1} u_{\alpha_2}\right\} \times$$

$$\times \sum_{p=0}^{\infty} \frac{i^p}{p!} \sum_{\alpha_1, \ldots, \alpha_p=1}^{n} b_p(t_{\alpha_1}, \ldots, t_{\alpha_p}) u_{\alpha_1} \ldots u_{\alpha_p}, \tag{1}$$

где $m_0 = 1,\ b_0 = 1$;

$$f_n(u_1, \ldots, u_n;\ t_1, \ldots, t_n) = M \exp\left\{i \sum_{\alpha=1}^{n} u_\alpha \xi(t_\alpha)\right\}$$

есть характеристическая функция совместного распределения случайных величин $\xi(t_1), \ldots, \xi(t_n)$. Выбранные моменты времени $t_1, \ldots, t_n$ произвольны и должны лишь принадлежать области определения случайного процесса. Число их также произвольно. Функции $s(t)$, $r(t_1, t_2)$ назовем образующими функциями для данных квазимоментных функций. Заданием случайного процесса и образующих функций квазимоментные функции определяются однозначно. Образующие функции удобно подбирать таким образом, чтобы они копировали $k_1(t)$, $k_2(t_1, t_2)$, соответственно. В том случае, когда

$$s(t) = k_1(t), \quad r(t_1, t_2) = k_2(t_1, t_2),$$

квазимоментные функции можно назвать собственно квазимоментными функциями.

Вследствие симметрии квазимоментных функций имеем

$$f_n(u_1, \ldots, u_n; t_1, \ldots, t_n) = \exp\left\{i \sum_{\alpha=1}^{n} s(t_\alpha) u_\alpha + \frac{i^2}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^{n} r(t_\alpha, t_\beta) u_\alpha u_\beta\right\} \times$$

$$\times \sum_{\mu_1, \ldots, \mu_n=0}^{\infty} \frac{i^{\mu_1+\ldots+\mu_n}}{\mu_1! \ldots \mu_n!} b_{\mu_1+\ldots+\mu_n}(t_1^{(\mu_1)}, \ldots, t_n^{(\mu_n)}) u_1^{\mu_1} \ldots u_n^{\mu_n}, \qquad (2)$$

где обозначено

$$b_{\mu_1+\ldots+\mu_n}(\overbrace{t_1, \ldots, t_1}^{\mu_1 \text{ раз}}, \overbrace{t_2, \ldots, t_2}^{\mu_2 \text{ раз}}, \ldots, \overbrace{t_n, \ldots, t_n}^{\mu_n \text{ раз}}) = b_{\mu_1+\ldots+\mu_n}(t_1^{(\mu_1)}, \ldots, t_n^{(\mu_n)}).$$

Плотность распределения вероятностей, соответствующую (2), можно записать

$$P_n(\xi_1, \ldots, \xi_n; t_1, \ldots, t_n) = \frac{\Delta^{1/2}}{(2\pi)^{n/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}(\xi_\alpha - s_\alpha)(\xi_\beta - s_\beta)\right\} \times$$

$$\times \sum_{\mu_1, \ldots, \mu_n=0}^{\infty} \frac{1}{\mu_1! \ldots \mu_n!} b_{\mu_1+\ldots+\mu_n}(t_1^{(\mu_1)}, \ldots, t_n^{(\mu_n)}) H_{\mu_1\ldots\mu_n}(\xi_1 - s_1, \ldots, \xi_n - s_n), \qquad (3)$$

где $s_\alpha = s(t_\alpha)$, $\Delta = \operatorname{Det}\|a_{\alpha\beta}\|$, $\|a_{\alpha\beta}\| = \|r(t_\alpha, t_\beta)\|^{-1}$ $(\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n)$, $H_{\mu_1\ldots\mu_n}(x_1, \ldots, x_n)$ — многомерный полином Чебышева — Эрмита, соответствующий $\|a_{\alpha\beta}\|$.

Встречающиеся обычно плотности распределения удовлетворяют условиям разложения в сходящийся ряд (3). Вследствие ортогональности полиномов $H_{\mu_1\ldots\mu_n}(x_1, \ldots, x_n)$ и $G_{\mu_1\ldots\mu_n}(x_1, \ldots, x_n)$ [1, 2]

$$\int \cdots \int \exp\left[-\frac{1}{2}\sum a_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta\right] H_{\mu_1\ldots\mu_n}(x_1, \ldots, x_n) G_{\nu_1\ldots\nu_n}(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n =$$

$$= \frac{(2\pi)^{n/2}}{\Delta^{1/2}} \mu_1! \ldots \mu_n! \, \delta_{\mu_1\nu_1} \ldots \delta_{\mu_n\nu_n};$$

коэффициенты указанного разложения равны

$$b_{\mu_1+\ldots+\mu_n}(t_1^{(\mu_1)}, \ldots, t_n^{(\mu_n)}) =$$

$$= \int \cdots \int p_n(\xi_1, \ldots, \xi_n; t_1, \ldots, t_n) G_{\mu_1\ldots\mu_n}(\xi_1 - s_1, \ldots, \xi_n - s_n) d\xi_1 \ldots d\xi_n =$$

$$= MG_{\mu_1\ldots\mu_n}(\xi_1 - s_1, \ldots, \xi_n - s_n). \qquad (4)$$

Задавшись определенной погрешностью, мы можем оборвать ряд (3), а следовательно, и (2), оставив достаточное число первых членов. Таким образом, наиболее важными являются младшие квазимоментные функции. Старшие функции, начиная с некоторого порядка p, зависящего, вообще говоря, от n и от точности рассмотрения, во многих практических вопросах можно не принимать во внимание.

Используя метод, примененный нами в другой работе при выводе формулы, выражающей моментные функции через корреляционные, получим, что квазимоментные функции выражаются аналогичным же образом, только вместо $k_1(t)$, $k_2(t_1, t_2)$ будут фигурировать, соответственно, $k_1(t) - s(t)$ и $k_2(t_1, t_2) - r(t_1, t_2)$, т. е.

$$b_p(t_1, \ldots, t_q) = \\ = \sum_{\sigma_1+2\sigma_2+\ldots+p\sigma_p=p} \frac{\mathrm{S}_{p!}}{\sigma_1!\,\sigma_2!(2!)^{\sigma_2}\ldots\sigma_p!(p!)^{\sigma_p}} (k_1-s)^{(\sigma_1)}(k_2-r)^{(\sigma_2)}k_3^{(\sigma_3)}\ldots k_p^{(\sigma_p)}. \tag{5}$$

Положения, изложенные выше для одного случайного процесса $\xi(t)$, можно обобщить на несколько случайных процессов. Если, например, имеются два процесса $\xi(t)$ и $\zeta(t)$, то к их образующим функциям $s(t)$, $r(t_1, t_2)$ и $s'(t)$, $r'(t_1, t_2)$ следует добавить еще смешанную образующую функцию $\rho(t_1, t_2)$, при этом статистическую связь функций $\xi(t)$ и $\zeta(t)$ будут характеризовать смешанные квазимоментные функции

$$b_{(p)\xi,\,(q)\zeta}(t_1, \ldots, t_p;\ t_1', \ldots, t_q') \quad (p, q = 0, 1, 2, \ldots),$$

для которых имеет место формула, аналогичная (4):

$$b_{(u)\xi,\,(v)\zeta}(t_1^{(\mu_1)}, \ldots, t_p^{(\mu_p)};\ t'^{(\nu_1)}_1, \ldots, t'^{(\nu_q)}_q) = \\ = \int\cdots\int p(\xi_1, \ldots, \xi_p; \zeta_1, \ldots, \zeta_q)\, G_{\mu_1\ldots\mu_p\nu_1\ldots\nu_q}(\Xi, \mathrm{Z}) \times \\ \times d\xi_1\ldots d\xi_p\, d\zeta_1\ldots d\zeta_q = MG_{\mu_1\ldots\mu_p\nu_1\ldots\nu_q}(\Xi, \mathrm{Z}), \tag{6}$$

где $u = \sum\limits_1^p \mu_i$; $v = \sum\limits_1^q \nu_i$; $\Xi = \xi_1 - s_1, \ldots, \xi_p - s_p$; $\mathrm{Z} = \zeta_1 - s_1', \ldots, \zeta_q - s_q'$.

При линейных преобразованиях случайных процессов квазимоментные функции преобразуются по тем же правилам, что корреляционные и моментные функции, если образующие их функции также преобразуются по этим же правилам.

Нелинейному преобразованию

$$\eta(t) = f(\xi(t)) \tag{7}$$

соответствует линейное преобразование квазимоментных функций.

Действительно, если обозначить величины, относящиеся к процессу $\eta(t)$, волной сверху, то из (4) имеем

$$\widetilde{b}_k(t_1^{(\nu_1)}, \ldots, t_n^{(\nu_n)}) = M\widetilde{G}_{\nu_1\ldots\nu_n}(\eta_1 - \widetilde{s}_1, \ldots, \eta_n - \widetilde{s}_n) = \\ = \int\cdots\int p_n(\xi_1, \ldots, \xi_n; t_1, \ldots, t_n)\, \widetilde{G}_{\nu_1\ldots\nu_n}(f(\xi_1) - \widetilde{s}_1, \ldots, f(\xi_n) - \widetilde{s}_n)\, d\xi_1\ldots d\xi_n,$$

где $\widetilde{G}$ — полином Чебышева—Эрмита, соответствующий матрице $\|\widetilde{a}_{\alpha\beta}\| = \|\widetilde{r}(t_\alpha, t_\beta)\|^{-1}$.

Подставив сюда (3), получим

$$\widetilde{b}_k(t_1^{(\nu_1)}, \ldots, t_n^{(\nu_n)}) = \sum_{\mu_1, \ldots, \mu_n} \gamma_{\nu_1\ldots\nu_n\mu_1\ldots\mu_n}\, b_m(t_1^{(\mu_1)}, \ldots, t_n^{(\mu_n)}), \tag{8}$$

где $k = \sum\limits_1^n \nu_i$, $m = \sum\limits_1^n \mu_i$,

$$\gamma_{\nu_1\ldots\nu_n\mu_1\ldots\mu_n} = \frac{\Delta^{1/2}}{(2\pi)^{n/2}} \frac{1}{\mu_1!\ldots\mu_n!} \int\cdots\int \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\,\beta=1}^n a_{\alpha\beta}x_\alpha x_\beta\right] \times \\ \times H_{\mu_1\ldots\mu_n}(x_1, \ldots, x_n)\, \widetilde{G}_{\nu_1\ldots\nu_n}(f(x_1+s_1) - \widetilde{s}_1, \ldots, f(x_n+s_n) - \widetilde{s}_n)\, dx_1\ldots dx_n.$$

Используя формулу (6), можно также найти смешанные квазимоментные функции $b_{(u)\xi,(v)\eta}(t_1^{(\mu_1)}, \ldots, t_p^{(\mu_p)}; t_{p+1}^{(\nu_1)}, \ldots, t_{p+q}^{(\nu_q)})$.

Для более общего случая, когда неизвестная случайная функция η нелинейно зависит от двух случайных процессов ξ и ζ:

$$\eta(t) = f(\xi(t), \zeta(t)), \tag{9}$$

имеют место формулы, аналогичные (8).

В том частном случае, когда

$$\eta(t) = f\left(\xi(t), \frac{d\xi(t)}{dt}\right), \quad \text{т. е. } \zeta(t) = \frac{d\xi(t)}{dt}, \tag{10}$$

чтобы функции $b_{(g)\xi,(h)\zeta}$ находились дифференцированием $b_{(k)\xi}$, следует положить

$$s_\xi(t) = s(t), \qquad s_\zeta(t) = \frac{ds}{dt},$$

$$r_\xi(t_1, t_2) = r(t_1, t_2), \quad r_{\xi\zeta}(t_1, t_2) = \frac{\partial}{\partial t_2} r(t_1, t_2), \quad r_\zeta(t_1, t_2) = \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} r(t_1, t_2).$$

Тогда

$$b_{(g)\xi(h)\zeta}(t_1, \ldots, t_{g+h}) = \frac{\partial^h}{\partial t_{g+1} \ldots \partial t_{g+h}} b_{(g+h)\xi}(t_1, \ldots, t_{g+h}). \tag{11}$$

Используя квазимоментные функции, можно решить обратную задачу — как отыскать квазимоментные функции процесса $\xi(t)$, задаваемого нелинейным дифференциальным уравнением (10), в котором $\eta(t)$ является известной случайной функцией. Методика решения этой задачи зависит от способа задания начальных условий для $\xi(t)$.

Если задано детерминированное начальное значение $\xi(t_0) = \xi_0$, то должны предполагаться известными как квазимоментные функции $b_{(u)\xi_0}$, так и смешанные функции, описывающие корреляцию между ξ_0 и функцией $\eta(t)$. Без этого описание $\xi(t)$ было бы неполным.

Если же интересуются значениями $\xi(t)$ по истечении достаточно большого времени от начального момента t_0, роль начальных условий исчезает. В частности, сюда относится случай стационарного процесса $\xi(t)$, когда начальные условия заменяются условием стационарности.

Указанную задачу можно решать, рассматривая некоторое выбранное число младших квазимоментных функций $b_{(u)\xi}$ $(u = 1, \ldots, n)$, полагая высшие разными нулю. При этом получается система линейных дифференциальных уравнений относительно конечного числа этих квазимоментных функций. Выбор n зависит от требуемой точности рассмотрения.

Поступило
30 VI 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] P. Appel, J. Kampé de Feriet, Fonctions hypergéometriques et hyperspheriques, Polynomes d'Hermite, Paris, 1926. [2] С. Х. Сирожд инов, Тр. Среднеазиатск. гос. ун-та (1949).