

В. И. КРЫЛОВ

## О ВЫЧИСЛЕНИИ НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА С МАЛЫМ ЧИСЛОМ ЗНАЧЕНИЙ ИНТЕГРИРУЕМОЙ ФУНКЦИИ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 30 XI 1953)

При вычислении определенного интеграла механическими квадратурами  $\int_a^b f(t) dt = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k)$  наибольшая часть вычислительного труда обычно расходуется на нахождение значений  $f(x_k)$  интегрируемой функции. Стремление возможно экономить вычислительный труд и получить значение интеграла с нужной точностью при малом числе значений функции  $f$  побудило Гаусса, Кристоффеля, Стильбеса и др. развить теорию квадратурных формул, имеющих при фиксированном числе  $n$  узлов наивысшую возможную степень точности. Повышение степени точности квадратуры здесь достигается путем специального выбора коэффициентов  $A_k$  и узлов  $x_k$  квадратурной суммы.

При вычислении значений интеграла с переменной границей, когда расчеты ведутся не для одного, а для многих значений границы интегрирования, существует, кроме выбора узлов и коэффициентов квадратурной формулы, еще дополнительный источник сбережения вычислений. Можно стремиться к тому, чтобы каждое значение интегрируемой функции было использовано при нахождении не одного, а нескольких значений неопределенного интеграла.

Пусть нужно найти значения  $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t) dt$  для равноотстоящих значений верхнего предела интегрирования  $x$  с шагом  $h$ :  $x_k = x_0 + kh$ . Допустим, что расчеты доведены до точки  $x_n$  и нахождению подлежит следующее значение функции  $y_{n+1} = y(x_n + h)$ . Для его вычисления мы можем воспользоваться любыми известными значениями  $y_0, y_1, \dots, y_n$  и какими угодно значениями интегрируемой функции  $f$ . Мы остановимся исключительно на том случае, когда для нахождения  $y_{n+1}$  привлекается только одно предшествующее значение функции  $y_n$ . Тогда  $y_{n+1} = y_n + \int_{x_n}^{x_n+h} f(t) dt$ , и вычисление  $y_{n+1}$  приводится к нахождению интеграла, стоящего в правой части равенства, по значениям  $f$ . Если мы хотим, чтобы расчетная формула имела коэффициенты, не зависящие от номера  $n$  шага, мы должны считать, что узлы, в которых вычисляются значения  $f$ , расположены  $h$ -периодически. Условимся точки  $\alpha + kh$  ( $k = 0, \pm 1, \dots$ ), отвечающие различным  $k$ , называть сходственными.

Допустим, что для вычисления интеграла  $\int_{x_n}^{x_n+h} f(t) dt$  мы берем на промежутке  $x_n \leq t < x_n + h$   $m$  узлов  $\alpha, \beta, \dots, \lambda$ . Их мы будем ниже

называть основными. Пусть кроме того мы привлекаем дополнительно  $a$  узлов  $\alpha + p_i h$ , сходственных  $\alpha$ ;  $b$  узлов  $\beta + q_i h$ , сходственных  $\beta, \dots$ ;  $l$  узлов  $\lambda + t_i h$ , сходственных  $\lambda$ .

Распределение дополнительных узлов по промежуткам между  $x_k$  определяется числами  $p_i, q_i, \dots, t_i$ . Когда вычисления ведутся на большое число шагов, каждый узел, сходственный  $\alpha$ , либо  $\beta, \dots$ , либо  $\lambda$ , если он не лежит вблизи начала или конца таблицы  $y_k$ , будет применяться для нахождения, соответственно,  $a + 1, b + 1, \dots, l + 1$  значений неопределенного интеграла.

Общее число принятых узлов  $m + a + b + \dots + l$  обозначим  $n + 1$ . При построении квадратурной формулы

$$\int_{x_n}^{x_{n+h}} f(t) dt = A_0 f(\alpha) + \sum_{i=1}^a A_i f(\alpha + p_i h) + \dots + L_0 f(\lambda) + \sum_{i=1}^l L_i f(\lambda + t_i h) \quad (1)$$

всегда можно достигнуть того, чтобы при любых  $\alpha, \dots, \lambda; p_i, \dots, t_i$  она была верной для целых многочленов степени  $n$ . Для этого достаточно коэффициенты  $A_i, \dots, L_i$  принять равными интегралам от множителей при соответствующих значениях  $f$  в интерполяционной формуле Лагранжа, если выполнить интерполирование  $f$  по ее значениям в принятых узлах. Дальнейшее увеличение степени точности механической квадратуры возможно, как известно, только за счет выбора узлов.

Введем следующие многочлены, связанные с узлами квадратурной формулы

$$\omega(x) = (x - \alpha) \dots (x - \lambda), \quad \omega_\alpha(x) = \prod_{i=1}^a (x - \alpha - p_i h), \dots$$

$$\dots, \omega_\lambda(x) = \prod_{i=1}^l (x - \lambda - t_i h), \quad \Omega(x) = \omega(x) \omega_\alpha(x) \dots \omega_\lambda(x).$$

Приводимые ниже теоремы показывают, насколько может быть увеличена степень точности квадратурной формулы (1) при помощи выбора узлов.

**Теорема 1.** *Каковы бы ни были  $\alpha, \dots, \lambda; p_i, \dots, t_i$ , квадратурная формула (1) не может быть точной для целых многочленов степени  $n + m + 1$ .*

**Теорема 2.** *Каковы бы ни были числа  $p_i, \dots, t_i$ , основные узлы  $\alpha, \dots, \lambda$  всегда могут быть выбраны так, чтобы квадратурная формула (1) была точной для всевозможных многочленов степени  $n + m$ .*

Нижеследующая теорема указывает, какими свойствами должны обладать узлы и коэффициенты формулы (1) для того, чтобы она имела наивысшую степень точности  $n + m$ .

**Теорема 3.** *Для того чтобы квадратурная формула (1) была точной для всевозможных многочленов степени  $n + m$ , необходимо и достаточно, чтобы она была интерполяционной и чтобы для любого многочлена  $Q(x)$  степени меньше  $m$  выполнялось условие ортогональности*

$$\int_{x_n}^{x_{n+h}} \Omega(x) Q(x) dx = 0.$$

Ленинградское отделение  
Математического института  
им. В. А. Стеклова  
Академии наук СССР

Поступило  
5 XI 1953