

Б. М. БРЕДИХИН

**О СУММАТОРНЫХ ФУНКЦИЯХ ХАРАКТЕРОВ ЧИСЛОВЫХ ПОЛУГРУПП**

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 21 XI 1953)

Ранее другими авторами рассмотрен вопрос о росте сумматорных функций характеров полугрупп положительных алгебраических чисел  $(1, 2)$  с конечной базой. Аналогичный вопрос был поставлен для полугрупп положительных вещественных чисел с конечной базой. А. О. Гельфондом устно была высказана гипотеза о том, что характеры таких полугрупп также обладают растущей сумматорной функцией. В этой заметке излагается доказательство гипотезы Гельфонда. Используя известные обозначения  $(1-3)$ , мы можем сформулировать следующую теорему.

**Теорема.** Пусть  $\chi(\alpha)$  — нормированный характер полугруппы положительных вещественных чисел  $\alpha \geq 1$  с конечной базой

$$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N \quad (\omega_i > 1, N > 1);$$

$H(x)$  — сумматорная функция характера  $\chi(\alpha)$  для  $x \rightarrow \infty$ ; пусть, наконец,  $M_{k,l}(x)$  — число знаменателей подходящих дробей числа  $\frac{\lg \omega_l}{\lg \omega_k}$  ( $k \neq l$ ) в интервале  $[0, x]$ .

Тогда

$$\max_{x \in [0, \xi]} |H(x)| \gg \sqrt{\max_{k,l} M_{k,l} (\sqrt{\xi} \lg^{-1/2} \xi)}.$$

Отсюда, в частности, следует:

1°.  $\overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} |H(x)| = \infty$ .

2°.  $H(x) = \Omega(\sqrt{\lg_m x})$  в случае, если число  $\frac{\lg \omega_l}{\lg \omega_k}$  разлагается в цепную дробь  $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n, \dots]$  с медленно растущими неполными частными  $a_n = O(l_m(cn))$ .

Заметим, что для справедливости доказанной нами ранее теоремы  $(3)$  уже не требуется выполнимости условия  $(1^2)$  этой теоремы.

Имея в виду рассмотренный нами ранее прием  $(3)$ , достаточно доказать теорему для случая полугруппы с базой из двух вещественных чисел. Поэтому дальше считаем  $N = 2$ .

Примем еще следующие определения и обозначения  $(2)$ . Рассмотрим  $L$ -функцию характера  $\chi(\alpha)$ :

$$\mathcal{L}(s, \chi) = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\chi(\alpha_v)}{\alpha_v^s} = \prod_{k=1}^2 (1 - \chi(\omega_k) \omega_k^{-s})^{-1} \quad (1)$$

(ряд абсолютно сходится при  $\sigma > 0$ , где  $\sigma = \text{Re } s$ ).  $\mathcal{L}(s, \chi)$  правильна в плоскости (s), исключая полюса в точках  $s_{k,n} = \tau_{k,n} i$ ;

$$\tau_{k,n} = \frac{\varphi_k + 2\pi n}{\lg \omega_k}, \quad \varphi_k = \arg \chi(\omega_k), \quad \delta_{k,n} = ((\vartheta_{k,l} \cdot n + \gamma_{k,l})),$$

где  $\vartheta_{k,l} = \frac{\lg \omega_l}{\lg \omega_k}$ ,  $\gamma_{k,l} = \frac{\varphi_k \cdot \vartheta_{k,l} - \varphi_l}{2\pi}$  ( $k \neq l$ ;  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ).

Теорему достаточно доказывать для

$$s_{k,n} \neq 0, \quad \delta_{k,n} > \frac{\text{const}}{|n| \lg |n|}, \quad H(x) \ll \lg x,$$

так как для исключенных случаев она верна (2).

$$L_{k,n} = \text{Res}_{s=s_{k,n}} \mathcal{L}(s, \chi) \asymp \delta_{k,n}^{-1}.$$

Лемма 1. Пусть  $c_1, c_2, c_3$  — произвольные положительные постоянные;  $\eta, x, T, T'$  — произвольные величины, удовлетворяющие условиям:  $T > c_1$ ;  $T' \asymp T$  при  $T \rightarrow \infty$ ;  $0 < \eta < c_2$ ;  $0 < |x| < c_3 T^{-1}$ .

Тогда

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\eta - T' i}^{\eta + T' i} \frac{e^{xs}}{s} ds = E_x + R(x),$$

где

$$E_x = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0; \\ 0, & \text{если } x < 0; \end{cases}$$

$$R(x) \ll \frac{1}{T} \frac{e^{x\eta}}{|x|} \quad (2)$$

или

$$R(x) \ll \lg c \frac{1 + (xT)^2}{(xT)^2}. \quad (3)$$

Доказательство. Оценка (2) для  $R(x)$  доказывается контурным интегрированием. Оценка (3) для  $R(x)$  получается в результате более точного вычисления  $R(x)$  путем разбиения на действительную и мнимую части.

Известно (2), что в каждом интервале длины 1 на мнимой оси найдется такое  $T$ , для которого

$$\mathcal{L}(\sigma + iT, \chi) \ll 1$$

равномерно относительно  $T$  и  $\sigma$ . В дальнейшем мы будем брать только такие значения  $T$  и  $T'$ .

Лемма 2. Пусть  $\eta, x, T$  и  $T'$  удовлетворяют условиям леммы 1 и пусть  $x \neq \lambda_\nu$ , где  $\lambda_\nu = \lg a_\nu$ .

Тогда

$$\psi_T(x) = H(x) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \chi(a_\nu) R(x - \lambda_\nu) + O(1),$$

где

$$\psi_T(x) = \sum_{k=1}^2 \sum_{-T < \tau_{k,n} < T'} \frac{L_{k,n}}{s_{k,n}} e^{\tau_{k,n} x i}.$$

Доказательство. Почленно интегрируя ряд (1) и применяя лемму 1, получим

$$(3) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\eta-Ti}^{\eta+Ti} \frac{e^{xs}}{s} \mathcal{L}(s, \chi) ds = H(x) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \chi(\alpha_{\nu}) R(x - \lambda_{\nu}). \quad (4)$$

С другой стороны, применяя теорему о вычетах к функции  $\mathcal{L}(s, \chi)$ , имеем:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\eta-Ti}^{\eta+Ti} \frac{e^{xs}}{s} \mathcal{L}(s, \chi) ds = \psi_T(x) + O(1). \quad (5)$$

Из формул (4) и (5) следует доказываемая лемма.

Лемма 3. Пусть  $\xi$  произвольное  $> \text{const} > 0$ ;  $\eta = \frac{1}{\xi}$ ;  $T, T' \asymp \xi^7$ ;  $\tau = \xi^5$ .

Тогда

$$\frac{1}{\xi} \int_0^{\xi} |\psi_T(x)|^2 dx \ll \max_{x \in [0, \xi]} |H(x)|^2.$$

Доказательство. Для  $x \neq \lambda_{\nu}$  лемма 2 дает

$$|\psi_T(x)| \leq |H(x)| + \sum_{\nu=1}^{\infty} |R(x - \lambda_{\nu})| + O(1). \quad (6)$$

В дальнейшем будем учитывать, что число слагаемых, для которых  $\lambda_{\nu} \ll \xi$ , будет  $O(\xi^2)$ .

Применяя оценку (2) для  $R(x)$ , получим:

$$\sum_{\lambda_{\nu} > 2\xi} |R(x - \lambda_{\nu})| \ll \frac{1}{T\xi} \sum_{\lambda_{\nu} > 2\xi} \alpha_{\nu}^{-\eta} \ll \frac{\xi}{T} \ll 1; \quad (7)$$

$$\sum_{\xi + \frac{1}{\xi^2} < \lambda_{\nu} \leq 2\xi} |R(x - \lambda_{\nu})| \ll \frac{\xi^4}{T} \ll 1. \quad (8)$$

Из формул (6), (7) и (8), используя неравенство Коши — Буняковского, легко выводим неравенство:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\xi} \int_0^{\xi} |\psi_T(x)|^2 dx &\ll \frac{1}{\xi} \int_0^{\xi} |H(x)|^2 dx + \\ &+ \xi \sum_{\lambda_{\nu} \leq \xi + \frac{1}{\xi^2}}^{\xi + \frac{1}{\xi^2} + \frac{1}{\tau}} \int_0^{\xi} |R(x - \lambda_{\nu})|^2 dx + 1. \end{aligned} \quad (9)$$

Применяя оценку (2) для  $R(x)$ , получим:

$$\int_0^{\lambda_{\nu} - \frac{1}{\tau}} |R(x - \lambda_{\nu})|^2 dx \ll \frac{\tau^2 \xi}{T^2} \ll \frac{1}{\xi^3}; \quad (10)$$

$$\int_{\lambda_{\nu} + \frac{1}{\tau}}^{\xi + \frac{1}{\xi^2} + \frac{1}{\tau}} |R(x - \lambda_{\nu})|^2 dx \ll \frac{\tau^2 \xi}{T^2} \ll \frac{1}{\xi^3}. \quad (11)$$

Применяя оценку (3) для  $R(x)$ , получим:

$$\int_{\lambda_v - \frac{1}{\tau}}^{\lambda_v + \frac{1}{\tau}} |R(x - \lambda_v)|^2 dx \ll \int_0^{\frac{1}{\tau}} \lg^2(1 + x^2 T^2) dx + \int_0^{\frac{1}{\tau}} \lg^2 x T dx \ll \frac{1}{\xi^3}. \quad (12)$$

Из формул (9), (10), (11) и (12) следует, что

$$\frac{1}{\xi} \int_0^{\xi} |\psi_T(x)|^2 dx \ll \frac{1}{\xi} \int_0^{\xi} |H(x)|^2 dx + 1.$$

Отсюда следует лемма 3.

Доказательство теоремы. Применяя лемму 3 <sup>(2)</sup> к функции

$$\psi(x) = \sum_{-T < \tau_v < T'} \frac{L_v}{s_v^2} e^{\tau_v x i}$$

и принимая во внимание, что

$$\sum_{-T < \tau_v < T'} \left| \frac{L_v}{\tau_v^2} \right| \ll \lg^2 T,$$

получаем:

$$\sum_{|v| \leq z} \left| \frac{L_v}{\tau_v} \right|^2 \ll \frac{1}{\xi} \int_0^{\xi} |\psi_T(x)|^2 dx + O\left(\frac{1}{\xi} z^2 \lg^3 T\right),$$

где  $v$  — новые номера чисел  $\tau_{k,n}$ , упорядоченных по их возрастанию.

Полагая  $z = \sqrt{\xi} \lg^{-1/2} \xi$  и применяя лемму 3 настоящей статьи, получим

$$\max_{x \in [0, \xi]} |H(x)|^2 \gg \sum_{|v| \leq z} \left| \frac{L_v}{\tau_v} \right|^2. \quad (13)$$

Известно <sup>(2)</sup>, что

$$\sum_{|v| \leq z} \left| \frac{L_v}{\tau_v} \right| \gg P\left(\frac{z}{2}\right), \quad (14)$$

где  $P(x)$  — число тех натуральных  $n \in [0, x]$ , для которых имеет место неравенство

$$((\vartheta_{k,l} \cdot n + \gamma_{k,l})) \ll \frac{5}{n}.$$

Известно также <sup>(2)</sup>, что

$$P(x) \gg M_{k,l}(x). \quad (15)$$

Поэтому из формул (13), (14) и (15) получаем:

$$\max_{x \in [0, \xi]} |H(x)|^2 \gg M_{k,l}(\sqrt{\xi} \lg^{-1/2} \xi).$$

Отсюда следует доказываемая теорема.

Полученные результаты могут быть распространены и на полугруппы более общего типа, например на полугруппы чисел разного знака при дополнительных условиях.

Считаю приятным долгом выразить глубокую благодарность моему научному руководителю проф. Н. Г. Чудакову, ценные указания которого позволили существенно улучшить первоначальный вариант доказательства гипотезы Гельфонда.

Поступило  
19 XI 1953

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> Н. Г. Чудаков, Ю. В. Линник, ДАН, 74, № 2 (1950). <sup>2</sup> Н. Г. Чудаков, А. К. Павлючук, Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 38, 366 (1951).  
<sup>3</sup> Б. М. Бредихин, ДАН, 90, № 5 (1953).