Доклады Академии Наук СССР
1954. Том XCIV, № 4

МАТЕМАТИКА

И. Я. БАКЕЛЬМАН

ГЛАДКИЕ ПОВЕРХНОСТИ С ОБОБЩЕННЫМИ ВТОРЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 30 XI 1953)

1. Построенная А. Д. Александровым [1,2] теория многообразий ограниченной кривизны послужила основой для исследования нерегулярных поверхностей (см. [3–6]). Главную роль в этих исследованиях играют следующие вопросы: 1) какие, по возможности общие, достаточные условия следует наложить на поверхность, чтобы ее внутренняя метрика имела ограниченную кривизну; 2) какова внешняя геометрия класса поверхностей, определяемого этими условиями, и ее связь с внутренней геометрией.

Основная идея настоящей работы состоит в том, чтобы для построения теории нерегулярных поверхностей использовать аппарат обобщенных производных, развитый для решения задач математической физики [7], вводя основные понятия теории этих поверхностей аналогично понятиям классической дифференциальной геометрии, заменяя обычные производные обобщенными. Настоящая работа и посвящена изложению полученных в этом направлении результатов.

В дальнейшем за рассматриваемым здесь более широким, чем в [5], классом поверхностей мы оставляем старое название гладких поверхностей ограниченного искривления.

2. Пусть гладкая поверхность F задана в пространстве непрерывно дифференцируемой вектор-функцией:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v), \tag{1}$$

где u, v меняются в некоторой ограниченной области D плоскости (u, v), причем в D всюду $|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \geqslant r_0 > 0$.

Поверхность F бу гладкой поверхностью ограниченного ис , если вектор-функция $\mathbf{r}(u, v)$ имеет в D все обобще роизводные * в смысле С. Л. Соболева, суммируемые с юбой внутренней области $D' \subset D$, удаленной от границы ельное расстояние.

Исследование гладких поверхностей ограниченного искривления существенно опирается на возможность их аппроксимации регулярными поверхностями. В качестве таких регулярных поверхностей используются средние поверхности F_h, которые задаются посредством средних вектор-функций

$$\mathbf{r}_h(u, v) = \iint\limits_D \mathbf{r}(\xi, \eta)\, \psi_n(\xi, \eta; u, v)\, d\xi\, d\eta, \tag{2}$$

где $\psi_n(\xi, \eta; u, v)$ — усредняющее ядро (см. [7], стр. 18).

---

* Понятие обобщенных производных для скалярных функций и их основные свойства (см. [7], § 5) дословно переносятся на вектор-функции.

Источником для получения основных результатов является следующая теорема:

Теорема 1. *Для того чтобы гладкая поверхность F, заданная вектор-функцией* (1) *в ограниченной области D на плоскости (u, v), была гладкой поверхностью ограниченного искривления, необходимо и достаточно, чтобы для любой области $D' \subset D$, удаленной от границы D на положительное расстояние, интегралы:*

$$\iint\limits_{D'} [\mathbf{r}^2_{h,\,uu} + \mathbf{r}^2_{h,\,uv} + \mathbf{r}^2_{h,\,vv}]\,du\,dv$$

были равномерно ограничены по h.

Гладкую поверхность ограниченного искривления можно также полным образом охарактеризовать через свойства сферического изображения. Как известно, сферическое изображение гладкой поверхности F осуществляет единичная нормаль к F

$$\mathbf{n}(u, v) = \frac{\mathbf{r}_u(u,v) \times \mathbf{r}_v(u,v)}{|\mathbf{r}_u(u,v) \times \mathbf{r}_v(u,v)|}.$$

Пусть D' — область, содержащаяся в D и удаленная от границы D на положительное расстояние. Рассмотрим круг K с центром O и радиусом R, лежащий внутри D'. Кругу K поставим в соответствие число

$$\mu_F(K) = \sup_{\xi^2+\eta^2 \leq R^2/4} \frac{4}{\pi R^2} \iint\limits_{K'} |\mathbf{n}(u+\xi,\ v+\eta) - \mathbf{n}(u, v)|^2\,du\,dv,$$

где K' — круг радиуса $R/2$, концентрический с K. Число $\mu_F(K)$ можно рассматривать как квадрат среднего диаметра сферического изображения множества $\tilde{K}$, которое на F соответствует кругу K.

Обозначим через

$$\mu_F(D') = \sup \sum_i \mu_F(K_i),$$

где точная верхняя граница берется по всем системам попарно непересекающихся кругов $K_i \subset D'$.

Теорема 2. *Для того чтобы гладкая поверхность F, заданная вектор-функцией* (1) *в ограниченной области D плоскости (u, v), была гладкой поверхностью ограниченного искривления, необходимо и достаточно, чтобы для всякой области $D' \subset D$, удаленной от границы D на положительное расстояние, число $\mu_F(D')$ было конечным.*

Как уже отмечалось в работе ([5]), классы гладких поверхностей, представимые разностью выпуклых функций, и гладких поверхностей ограниченного искривления не покрывают целиком друг друга. Однако оба эти класса содержатся в классе гладких поверхностей ограниченной внешней кривизны, введенном в рассмотрение А. В. Погореловым в работе ([6]). Отметим, что в работе ([6]) устанавливается только, что из ограниченности внешней кривизны поверхности следует ограниченность кривизны ее внутренней метрики. Поэтому результаты исследования гладких поверхностей ограниченного искривления не покрываются работами А. Д. Александрова ([3, 4]) и А. В. Погорелова ([6]).

3. Как известно, внутренняя метрика гладкой поверхности F задается квадратичной формой

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2, \tag{3}$$

коэффициенты которой суть непрерывные функции от u и v. Относительно внутренней метрики гладких поверхностей ограниченного искривления имеют место следующие теоремы.

Теорема 3. *В смысле внутренней метрики гладкая поверхность ограниченного искривления есть многообразие ограниченной кривизны.*

Теорема 4. *Коэффициенты квадратичной формы* (3), *задающей на гладкой поверхности F ограниченного искривления внутреннюю метрику, имеют обобщенные первые производные, суммируемые с квадратом по любой области $D' \subset D$, удаленной от границы D на положительное расстояние.*

Теорема 5. *На гладкой поверхности ограниченного искривления кривизна и абсолютная кривизна* (*см.* ([1])) *суть абсолютно непрерывные функции множества.*

Из теоремы 5 следует, что на гладкой поверхности ограниченного искривления: а) *вокруг всякой точки полный угол в смысле внутренней метрики равен* 2π; б) *повороты любой дуги, кратчайшей на обе стороны, равны нулю*; в) *избыток треугольника равен его кривизне.*

4. Пусть $\mathbf{r}_{uu}$, $\mathbf{r}_{uv}$ и $\mathbf{r}_{vv}$ — обобщенные вторые производные вектор-функции $\mathbf{r}(u, v)$, задающей в пространстве гладкую поверхность F ограниченного искривления, и пусть $\mathbf{n}(u, v)$ — единичная нормаль поверхности F. Введем в рассмотрение обобщенную вторую квадратичную форму

$$L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2,$$

$$L = (\mathbf{r}_{uu} \cdot \mathbf{n}), \quad M(\mathbf{r}_{uv} \cdot \mathbf{n}), \quad N = (\mathbf{r}_{vv} \cdot \mathbf{n}).$$

Оказывается, что для внутренней кривизны ω поверхности F, определенной А. Д. Александровым в ([1]) через избытки треугольников, справедлива следующая теорема:

Теорема 6. *На гладкой поверхности F ограниченного искривления для каждого борелевского множества E имеет место формула*

$$\omega(E) = \iint\limits_{E} \frac{LN - M^2}{EG - F^2}\, dS,$$

где dS — элемент площади поверхности F.

Из теоремы 6 следует, что *внутренние метрики средних поверхностей F_h правильно сходятся к внутренней метрике поверхности F* (т. е. функции E_h, F_h, G_h в D равномерно сходятся, соответственно, к E, F, G и $\omega_h^{\pm}$ слабо сходятся, как функции множества, к $\omega^{\pm}$, где $\omega^{\pm}$ — положительная и отрицательная части кривизны ω).

5. Для гладких поверхностей ограниченного искривления дословно так же, как в работах ([3], [5]), вводится понятие площади сферического изображения и устанавливается следующая теорема.

Теорема 7 (обобщение теоремы Гаусса). *Внутренняя кривизна всякой области на гладкой поверхности ограниченного искривления равна площади сферического изображения этой области.*

Из обобщения теоремы Гаусса легко выводятся внешнегеометрические критерии положительности (отрицательности) кривизны внутренней метрики поверхности. Именно, имеет место теорема:

Теорема 8. *Если гладкая поверхность F ограниченного искривления посредством нормалей взаимно-однозначно отображается в сферу так, что при этом обходы любого простого замкнутого контура на поверхности и его образа на сфере совпадают* (*противоположны*), *то внутренняя метрика поверхности F имеет положительную* (*отрицательную*) *кривизну, т. е. сумма углов любого треугольника на F не меньше* (*не больше*) π.

6. Одна из основных теорем классической дифференциальной геометрии состоит в том, что регулярная поверхность с точностью до движения однозначно определяется своими первой и второй квадратичными формами. Аналогичная теорема справедлива для гладких поверхностей ограниченного искривления.

Теорема 9. *Если у двух гладких поверхностей ограниченного искривления F_1 и F_2 почти везде соответственно совпадают первые и обобщенные вторые квадратичные формы, то F_1 и F_2 конгруентны.*

Доказательство этой теоремы основано на интегральном обобщении деривационных формул Вейнгартена, которые приводят к системе интегральных уравнений относительно первых производных вектор-функций, задающих в пространстве F_1 и F_2. Поэтому доказательство теоремы сводится к доказательству единственности решения некоторой системы интегральных уравнений, которое и осуществляется известным способом.

7. В заключение отметим некоторые результаты, относящиеся к случаю, когда гладкая поверхность ограниченного искривления имеет внутреннюю метрику положительной кривизны.

Теорема 10. *Гладкая поверхность F ограниченного искривления, гомеоморфная сфере и такая, что для любого открытого множества $G \subset F$*

$$\frac{\omega(G)}{S(G)} \geqslant K_0 > 0,$$

где $\omega(G)$ и $S(G)$ — соответственно, кривизна и площадь G, необходимо выпуклая.

Теорема 11. *Гладкая поверхность ограниченного искривления, удовлетворяющая условиям теоремы* 10, *однозначно определена в классе гладких поверхностей ограниченного искривления.*

Ленинградский технологический институт
им. В. М. Молотова

Поступило
19 XI 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Д. Александров, ДАН, **60**, № 9 (1948). [2] А. Д. Александров, ДАН, **63**, № 4 (1948). [3] А. Д. Александров, ДАН, **72**, № 4 (1950). [4] А. Д. Александров, Изв. АН Каз.ССР, **60**, № 3 (1949). [5] И. Я. Бакельман, ДАН, **82**, № 4 (1952). [6] А. В. Погорелов, ДАН, **89**, № 3 (1953). [7] С. Л. Соболев, Некоторые применения функционального анализа к математической физике, 1950.