Доклады Академии Наук СССР
1954. Том XCV, № 1

МАТЕМАТИКА

Действительный член Академии наук УССР Б. В. ГНЕДЕНКО

ЛОКАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ ПЛОТНОСТЕЙ

В последние годы интерес к классическим предельным теоремам для сумм независимых случайных величин значительно возрос, и для ряда задач, для которых ранее удавалось найти только частные результаты, в настоящее время существуют окончательные, в смысле разыскания необходимых и достаточных условий, решения. В настоящей заметке будет указано полное решение одной из задач, которой в последние годы было уделено значительное внимание, но найденные частные результаты для которой еще далеки от окончательности формулировки.

Задача ставится так: дана последовательность взаимно независимых случайных величин

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$$

с одинаковыми функциями распределения $F(x)$. Для сходимости функций распределения нормированных и центрированных соответственным образом подобранными числами $B_n > 0$ и A_n сумм

$$s_n = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n}{B_n} - A_n \tag{1}$$

к предельному распределению $\Phi(x)$ имеются окончательные и достаточно прозрачные условия (см. ([1]), стр. 185—192). Естественно возникающий вопрос об условиях сходимости при $n \to \infty$ плотностей распределения вероятностей сумм s_n (обозначим их через $p_n(x)$) к плотности $p(x)$ предельного распределения в смысле сходимости к нулю величины $\max\limits_{-\infty<x<\infty} |p_n(x) - p(x)|$ еще не имеет окончательного решения. Условия, указанные в ([1]) (стр. 238—245), далеко не окончательны и сложны только в силу недостаточности примененного аналитического аппарата. В недавней статье Смита ([2]) достигнут лишь небольшой сдвиг в этой задаче, и по существу в ней лишь незначительно обобщены результаты, имеющиеся в ([1]). В недавней работе Ю. В. Прохоров ([3]) пошел по другому пути и разыскивал условия сходимости плотностей в среднем. Окончательность и простота результатов Ю. В. Прохорова не исключают необходимости завершения исследований в первоначальном направлении. Настоящая заметка посвящена решению как раз этой задачи.

Теорема 1. *Для того чтобы при* $n \to \infty$

$$\max_{-\infty<x<\infty} |p_n(x) - p(x)| \to 0,$$

необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

1) *функция распределения* $F(x)$ *принадлежит области притяжения предельного распределения* $\Phi(x)$;

2) *существует такое* n_0, *что функция распределения суммы* $\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_{n_0}$ *удовлетворяет условию Липшица.*

Доказательство. Необходимость первого условия теоремы не требует пояснений. Так как предельные распределения для функций распределения сумм (1) ограничиваются устойчивыми законами, то необходимость второго условия теоремы очевидна в силу ограниченности плотностей распределения устойчивых законов (см. ([1]), стр. 196).

Доказательство достаточности требует более сложных рассуждений. Мы будем опираться при этом на следующую теорему о преобразованиях Фурье. Если $g(x)\subset L$ и ограничена, функция $\varphi(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx} g(x)\,dx$ неотрицательна, то $\varphi(t)\subset L$. Так как при компонировании функций распределения с ограниченными плотностями плотность композиции не превосходит минимальной ограничивающей константы для плотностей компонент, то из приведенной теоремы вытекает, что функция $|f(t)|^{2n_0}$, где n_0 — указанное в условии теоремы число, а $f(t)$ — преобразование Фурье функции $F(x)$, интегрируема. Таким образом, при $n>2n_0$ функции $f^n(t)\subset L$.

Дальнейшие рассуждения близки к тем, которые проведены в работах ([1]) (стр. 238—245) и ([4]).

Так как характеристическая функция s_n равна

$$\varphi_n(t)=e^{-itA_n} f^n\left(\frac{t}{B_n}\right),$$

то при $n>2n_0$ можно написать равенство

$$2\pi p_n(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} f^n\left(\frac{t}{B_n}\right) e^{-itA_n}\,dt.$$

Так как для плотности предельного распределения имеем

$$2\pi p(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\varphi(t)\,dt,$$

то для доказательства теоремы нам достаточно показать, что равномерно относительно x $(-\infty<x<\infty)$ при $n\to\infty$

$$I=\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\left[e^{-itA_n} f^n\left(\frac{t}{B_n}\right)-\varphi(t)\right]dt\to 0.$$

Представляем интеграл I в виде суммы следующих четырех интегралов:

$$I_1=\int\limits_{-A}^{A} e^{-itx}\left[e^{-itA_n} f^n\left(\frac{t}{B_n}\right)-\varphi(t)\right]dt,\quad I_2=-\int\limits_{|t|>A} e^{-itx}\varphi(t)\,dt,$$

$$I_3=\int\limits_{A<|t|\leqslant\varepsilon B_n} e^{-it(x+A_n)} f^n\left(\frac{t}{B_n}\right)dt,\quad I_4=\int\limits_{|t|>\varepsilon B_n} e^{-it(x+A_n)} f^n\left(\frac{t}{B_n}\right)dt.$$

В силу первого условия теоремы $I_1\to 0$ при любом $A>0$. $|I_2|$ может быть сделано меньше наперед заданного числа путем выбора достаточно большого A (в силу $\varphi(t)\subset L$). В силу второго условия для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $c>0$, что неравенство $|f(t)|\leqslant e^{-c}$

выполняется всюду в области $|t| \geqslant \varepsilon$. Таким образом (так как B_n растут медленнее чем $n^{\frac{1}{\alpha}+\varepsilon}$),

$$|I_4| \leqslant e^{-c(n-2n_0)} \int\limits_{|t|>\varepsilon B_n} \left| f\left(\frac{t}{B_n}\right)\right|^{2n_0} dt \leqslant B_n e^{-c(n-2n_0)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^{2n_0} dt \to 0.$$

Для оценки I_3 воспользуемся результатами теорем 2 и 3 работы (5), в силу которых при $t \to 0$ для любого $s > 0$

$$\frac{R \lg f(st)}{R \lg f(t)} \to s^\alpha \quad (0 < \alpha \leqslant 2).$$

Таким образом, если ε достаточно мало, то при $|t| \leqslant \varepsilon$

$$\frac{R \lg f(t)}{R \lg f(^1/_2 t)} = 2^\alpha + \eta_t,$$

где $|\eta_t| < \eta$; η может быть выбрано по произволу.

Теперь

$$|I_3| \leqslant \int\limits_{A < |t| \leqslant \varepsilon B_n} \left| f\left(\frac{t}{B_n}\right)\right|^n dt \leqslant \sum_{s=0}^{k} \int\limits_{2^s A < |t| \leqslant 2^{s+1} A} \left| f\left(\frac{t}{B_n}\right)\right|^n dt,$$

где k определено неравенствами $2^k A < \varepsilon B_n \leqslant 2^{k+1} A$.
Из предыдущего

$$|I_3| \leqslant \sum_{s=0}^{k} \int\limits_{A < |t| \leqslant 2A} e^{n \lg \left| f\left(\frac{t}{B_n}\right)\right| (2^\alpha - \eta)^s} 2^s\, dt.$$

Так как $F(x)$ принадлежит области притяжения устойчивого закона, то в области $A < |t| \leqslant 2A$

$$nR \lg f\left(\frac{t}{B_n}\right) = -c|t|^\alpha + o(1) < -\frac{c}{2}|t|^\alpha.$$

Таким образом,

$$|I_3| \leqslant \sum_{s=0}^{k} \int\limits_{A < |t| \leqslant 2A} e^{-\frac{c}{2}|t|^\alpha (2^\alpha - \eta)^s} 2^s\, dt.$$

Легко убедиться, что выбором достаточно большого A эта сумма может быть сделана меньше любого наперед заданного числа.

Доказанная теорема без труда переносится на случай суммирования независимых одинаково распределенных случайных векторов.

Теорема 2. *Если случайные величины ξ_k обладают моментами порядка $k \geqslant 3$, то в условиях теоремы 1 имеет место асимптотическое разложение*

$$p_n(x) = \varphi(x) + \sum_{s=1}^{k-2} \frac{1}{\sqrt{n^s}} P_s(-\varphi) + o\left(n^{-\frac{k-2}{2}}\right).$$

Определение полиномов $P_s(-\varphi)$ см. (1), стр. 244 и 209, $\varphi(x) = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$.

Институт математики
Академии наук УССР

Поступило
13 XI 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. В. Гнеденко, А. Н. Колмогоров, Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М. — Л., 1949. [2] W. L. Smith, Proc. Cambr. Phyl. Soc., **49**, № 3 (1953). [3] Ю. В. Прохоров, ДАН, **83**, № 5 (1952). [4] Б. В. Гнеденко, ДАН, **71**, № 3 (1950). [5] Б. В. Гнеденко, В. С. Королюк, Докл. АН УРСР, № 4 (1950).