

К. Г. АСАТУР

**О НЕУСТАНОВИВШЕМСЯ ДВИЖЕНИИ ГРУНТОВЫХ ВОД,
ПРИТЕКАЮЩИХ К ВОДОХРАНИЛИЩУ**

(Представлено академиком А. И. Некрасовым 12 I 1954)

Известное дифференциальное уравнение неустановившегося движения подземных вод со свободной поверхностью (1) для плоской задачи может быть представлено в виде

$$\mu \frac{\partial h}{\partial t} = -k \left(i \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} h \frac{\partial h}{\partial x} \right) + w = -\frac{\partial Q}{\partial x} + w^*, \quad (1)$$

где h и Q — соответственно, глубина и расход потока в сечении с координатой x ; t — время; i — уклон водоупора; μ — недостаток насыщения; k — коэффициент фильтрации; w — инфильтрация сверху.

Интегрирование нелинейного уравнения (1) в общем виде было предложено лишь методом конечных разностей (2). Строгое решение этого уравнения было указано при некоторых простых начальных и граничных условиях и при $i = 0$ (3). Решение линеаризованного уравнения (1) при $i = 0$ было дано и при других, практически более важных начальных условиях (4). Указанные выше решения применимы для задач, связанных с определением подпора грунтовых вод в условиях притока к водохранилищу.

Здесь предлагается другое годное для этих условий решение линеаризованного уравнения (1) при $i \neq 0$ на основе теории малых амплитуд, особенно простое в применении, когда граничные условия в сечении потока у водохранилища задаются в виде периодического изменения $h = f(t)$. Решение это позволяет с достаточной для практики точностью легко определить область распространения неустановившегося режима в грунте.

Представим h в форме

$$h = H + z, \quad (2)$$

где H — глубина потока при установившемся режиме; z — отклонение h от H ; считаем, что z мало по сравнению с H . Тогда из (1) получим

$$\mu \frac{\partial h}{\partial t} = -k \left(i \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} H \frac{\partial h}{\partial x} \right) + w$$

или

$$\mu \frac{\partial z}{\partial t} = -k \left[i \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{d}{dx} H \left(i - \frac{dH}{dx} \right) - \frac{\partial}{\partial x} H \frac{\partial z}{\partial x} \right] + w = -\frac{\partial Q}{\partial x} + w. \quad (3)$$

* При малом значении i .

При установившемся режиме имеем

$$Q_0 + \omega x = kH \left(i - \frac{dH}{dx} \right), \quad (4)$$

где Q_0 — расход потока в сечении у водохранилища.

Продифференцировав (4) по x и подставив его в (3), мы уравнению (3) после линеаризации в нем последнего члена в скобках придадим вид

$$* \frac{\partial z}{\partial t} = -k \left(\frac{\partial z}{\partial x} - H \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right). \quad (5)$$

Проинтегрировав (3) и учтя (4), получим

$$q = Q - (Q_0 + \omega x) = k \left(zi - H \frac{\partial z}{\partial x} \right), \quad (6)$$

где q — отклонение Q от значения его ($Q_0 + \omega x$) при установившемся режиме.

Если допустить, что у водохранилища $z = z_0$ колеблется по гармоническому закону с полупериодом T и амплитудами a и b :

$$z_0 = a \sin \frac{n\pi}{T} t + b \cos \frac{n\pi}{T} t \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (7)$$

то решением уравнения (5) будет

$$z = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{p^2 + q^2}} \left\{ e^{-\frac{i}{2H}(\sigma-1)x} \cos \left(\frac{n\pi}{T} t - \frac{\tau i x}{2H} + \alpha \right) - e^{\frac{i}{2H}[(\sigma+1)x - 2\sigma L]} \cos \left[\frac{n\pi}{T} t - \frac{\tau i}{2H}(L-x) + \alpha \right] \right\}, \quad (8)$$

где

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{1 + \left(\frac{4n\pi\mu H}{kTi^2} \right)^2} + 1},$$

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{1 + \left(\frac{4n\pi\mu H}{kTi^2} \right)^2} - 1},$$

$$p = 1 - e^{-\sigma i L/H} \cos \frac{\tau i L}{H},$$

$$q = e^{-\sigma i L/H} \sin \frac{\tau i L}{H},$$

$$\alpha = \arctg \frac{-ap + bq}{aq + bp},$$

а L — длина потока.

Так как возникшая в грунтовом потоке волна затухает на сравнительно небольшой длине, то в условиях притока к водохранилищу влиянием отраженных волн можно пренебречь, приняв $L = \infty$. В таком случае получим $p = 1$, $q = 0$, и так как $\sigma > 1$, уравнение (8) примет вид

$$z = \sqrt{a^2 + b^2} e^{-\frac{i}{2H}(\sigma-1)x} \cos \left(\frac{n\pi}{T} t - \frac{\tau i x}{2H} - \arctg \frac{a}{b} \right) * \quad (9)$$

Кривая годовых колебаний уровня в водохранилище обычно довольно хорошо аппроксимируется суммой небольшого числа n_0 членов ряда Фурье, и таким образом окончательное решение (5) представится в виде суммы выражений (9) для $n = 1, 2, \dots, n_0$; гармоника нулевого порядка будет определять установившуюся часть подпора.

* При уклоне i в сторону реки декремент в формуле (9) будет $e^{-\frac{i}{2H}(\sigma+1)x}$.

Величина q может быть найдена из (6) и (9).

Уравнение (9) дает возможность сделать следующее заключение о характере распространяющихся в грунте возмущений, вызванных периодическими колебаниями горизонта воды в водохранилище.

Амплитуда колебания с продвижением возмущения от берега водохранилища падает, так как $\sigma - 1 > 0$, с декрементом $e^{-\frac{i}{2H}(\sigma-1)x}$, причем скорость c волны в потоке выражается по формуле

$$c = \frac{2\pi nH}{i\tau T}. \quad (10)$$

Для малых значений i единицей по сравнению с членом $4\pi\mu H / kTi^2$ (а тем более с членом $4\pi n\mu H / kTi^2$), а также с его квадратом в формулах (7) и (8) оказывается возможным пренебречь и считать

$$r = \sqrt{\frac{\pi n\mu}{2kHT}} \approx \sigma \approx \tau. \quad (11)$$

При этом (9) примет вид

$$z = \sqrt{a^2 + b^2} e^{-rx} \cos\left(\frac{n\pi}{T}t - rx - \arctg \frac{a}{b}\right). \quad (12)$$

Частный случай этого решения, когда $b = 0$ и $n = 1$, был получен Форхгеймером в виде

$$z = ae^{-rx} \sin\left(\frac{\pi t}{T} - rx\right) \quad (13)$$

для колебаний, распространяющихся в грунтовом потоке с горизонтальными дном и первоначальной поверхностью воды ⁽⁵⁾. Заметим, что Форхгеймер считал возможным, не давая никаких обоснований, распространять свое решение на случаи негоризонтальной начальной свободной поверхности.

Если считать возможным пренебрегать единицей по сравнению с 10, то условием, при котором можно пользоваться решением (12), будет

$$i < \sqrt{\frac{\pi\mu H}{35kT}}; \quad (14)$$

скорость волны при этом будет

$$c = \sqrt{\frac{2\pi nkH}{\mu T}}. \quad (15)$$

Обозначив длину полуволны через λ и приняв во внимание, что

$$\lambda = c \frac{T}{n},$$

из (15) получим

$$\lambda = \sqrt{\frac{2\pi kHT}{n\mu}}, \quad (16)$$

а для декремента выражение $e^{-\frac{\pi}{\lambda}x}$.

При значении $x = \lambda$ декремент равен $e^{-\pi} = 0,04321$, т. е. в расстоянии полуволны от берега амплитуда колебаний уменьшается примерно до 4,3%.

Максимальное значение λ получим при $n = 1$:

$$\lambda_{\max} = \sqrt{\frac{2\pi kHT}{\mu}}. \quad (17)$$

Следовательно, на сравнительно небольшом для годовых колебаний (а для суточных еще примерно в 19 раз меньшем) расстоянии λ_{\max} от берега движение практически будет установившимся.

Рассмотренный здесь периодически меняющийся стабилизированный неустановившийся режим грунтовых вод является предельным для неустановившегося режима начального периода, связанного с наполнением водохранилища.

Поступило
17 X 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ M. J. Boussinesq, J. de Math. pures et appl., ser. 5, 10, 5 (1904).
² Г. Н. Каменский, Изв. АН СССР, ОТН, № 4, 53 (1949). ³ П. Я. Полубаринова-Кочина, Прикладн. матем. и мех., 13, 187 (1949). ⁴ Н. Н. Веригин, ДАН, 66, № 6, 1067 (1949). ⁵ Ph. Forchheimer, Sitzungsber. Akad. d. Wissensch. Wien, 128, Abt. IIa, 1233 (1919).