Доклады Академии Наук СССР
1954. Том XCV, № 2

МАТЕМАТИКА

И. И. ПЯТЕЦКИЙ-ШАПИРО

АБЕЛЕВЫ МОДУЛЯРНЫЕ ФУНКЦИИ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 16 I 1954)

Как известно, эллиптические модулярные функции можно получить следующим образом. Рассмотрим совокупность пар комплексных чисел (ω_1, ω_2), являющихся периодами эллиптических функций; очевидно, что парам (ω_1, ω_2) и $(\alpha\omega_1, \alpha\omega_2)$ (α — произвольное комплексное число) соответствуют изоморфные поля эллиптических функций и, следовательно, естественно такие пары идентифицировать. Это приводит к множеству, представляющему собой комплексную плоскость, из которой удалена вещественная ось. Далее, парам (ω_1, ω_2) и $(a\omega_1 + b\omega_2, c\omega_1 + d\omega_2)$; a, b, c, d — целые числа такие, что $ad - bc = \pm 1$, соответствуют одинаковые поля эллиптических функций. Если мы идентифицируем такие пары и рассмотрим аналитические функции на полученном многообразии, то мы и получим эллиптические модулярные функции.

Указанная схема, к сожалению, не обобщается для абелевых функций. Дело в том, что не любая система $2n$ вещественно независимых векторов может быть множеством периодов абелевой функции.

К. Зигель ([1]) указал способ построения модулярных абелевых функций, основанный на применении указанной схемы к совокупности базисов с фиксированной главной матрицей. Однако в теории абелевых функций есть задачи, для решения которых недостаточно модулярных функций, указанных Зигелем. К таким задачам относится исследование свойств абелевых функций с сингулярной* матрицей периодов.

Рассмотрим совокупность Ω матриц ω, состоящих из p строк и $2p$ столбцов $\omega_1, \ldots, \omega_{2p}$, для которых существует невырожденная абелева функция с периодами $\omega_1, \ldots, \omega_{2p}$. Пусть $\mathfrak{A}$ — некоторая алгебра, которая может быть алгеброй умножений некоторой неприводимой матрицы ω. А. А. Алберт перечислил все такие алгебры ([2]). Будем считать, что алгебра $\mathfrak{A}$ задана нам в виде алгебры квадратных матриц A порядка $2p$ с рациональными элементами. Обозначим через R_0 некоторую рациональную кососимметрическую матрицу порядка $2p$ и рассмотрим совокупность $\Omega_{\mathfrak{A}}$ всех $\omega \in \Omega$, обладающих алгеброй умножений $\mathfrak{A}$ и таких, что $\omega R_0 \omega' = 0$ и $i\omega R_0 \omega' > 0$.

В настоящей заметке дается определение модулярной группы на $\Omega_{\mathfrak{A}}$ и указывается способ ее вычисления. Для случая, когда $\mathfrak{A}$ — абсолютно вещественное поле алгебраических чисел, строятся модулярные функции и доказывается, что поле модулярных функций есть

---

* Матрица периодов ω называется сингулярной, если число линейно независимых рациональных кососимметрических матриц R таких, что $\omega R \omega' = 0$, больше 1.

поле алгебраических функций от m неизвестных, где m — размерность соответствующего многообразия. Модулярную группу $\Gamma_{\mathfrak{A}}$ на $\Omega_{\mathfrak{A}}$ определим как совокупность всех унимодулярных матриц U порядка $2p$ таких, что из $\omega \in \Omega_{\mathfrak{A}}$ следует $\omega U' \in \Omega_{\mathfrak{A}}$. Для нахождения $\Gamma_{\mathfrak{A}}$ можно применить следующий способ. Рассмотрим все кососимметрические рациональные матрицы R порядка $2p$, для которых $\omega R \omega' = 0$ для всех $\omega \in \Omega_{\mathfrak{A}}$. Хорошо известно, что собственные значения любой матрицы вида RR_0^{-1} вещественны. Пусть $\mathfrak{R}_0$ означает совокупность всех кососимметрических матриц $R = AR_0$, где все собственные значения A положительны. Легко показать, что если алгебра умножений матрицы ω совпадает с $\mathfrak{A}$, то совокупность всех R, для которых $i\omega R \bar{\omega}' > 0$, совпадает с $\mathfrak{R}_0$. Можно доказать, что модулярная группа $\Gamma_{\mathfrak{A}}$ состоит из всех унимодулярных матриц U таких, что $U'\mathfrak{R}_0 U = \mathfrak{R}_0$ и $U'\mathfrak{A}U'^{-1} = \mathfrak{A}$. Обозначим через $\Gamma^0_{\mathfrak{A}}$ подгруппу модулярной группы, состоящую из матриц U, для которых $U'RU = R$ для всех $R \in \mathfrak{R}_0$. Очевидно, что $\Gamma^0_{\mathfrak{A}}$ — нормальный делитель группы $\Gamma_{\mathfrak{A}}$. Если алгебра $\mathfrak{A}$ коммутативна, то индекс $\Gamma^0_{\mathfrak{A}}$ в $\Gamma_{\mathfrak{A}}$ конечен. Если же $\mathfrak{A}$ некоммутативна, то $\Gamma^0_{\mathfrak{A}}$ состоит из конечного числа преобразований.

Матрицы ω и $\alpha\omega$, где α — некоторая комплексная матрица порядка p, естественно идентифицировать, так как они соответствуют изоморфным полям абелевых функций. Многообразие, которое мы получили таким образом, обозначим через $H_{\mathfrak{A}}$. Если $\mathfrak{A}$ — поле рациональных чисел, то $H_{\mathfrak{A}}$ есть совокупность H всех симметрических комплексных матриц $Z = X + iY$, для которых $Y > 0$. Это многообразие было введено Зигелем и названо им обобщенной верхней полуплоскостью степени p. Нетрудно показать, что $H_{\mathfrak{A}}$ при любой $\mathfrak{A}$ вкладывается в H в виде аналитической поверхности. В дальнейшем мы ограничимся случаем, когда алгебра $\mathfrak{A}$ коммутативна. В этом случае, как известно, $\mathfrak{A}$ может быть либо абсолютно вещественным полем k степени $n \setminus p$, либо расширением абсолютно вещественного поля путем присоединения к нему квадратного корня из некоторого абсолютно отрицательного элемента. Мы будем заниматься лишь первым случаем. Мы доказываем, что $H_{\mathfrak{A}}$ аналитически эквивалентно произведению n обобщенных верхних полуплоскостей степени $r = p/n$, причем модулярная группа будет соизмерима* с группой, которую можно описать следующим образом. Любую точку $z \in H_{\mathfrak{A}}$ можно рассматривать как матричный вектор $z = (z_1, \ldots, z_n)$, где z_i — матрицы порядка r из обобщенной верхней полуплоскости степени r.

Пусть $U = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ — симплектическая матрица порядка $2r$, элементы которой — целые алгебраические числа из поля k. Обозначим через $k^{(1)}, \ldots, k^{(n)}$ все сопряженные с k поля. Пусть, далее, $U^{(i)}$ означает матрицу, элементы которой принадлежат полю $k^{(i)}$. Сопоставим теперь каждой U преобразование

$$z = (z_1, \ldots, z_n) \to (\tilde{z}_1, \ldots, \tilde{z}_n), \quad \tilde{z}_i = (A^{(i)} z_i + B^{(i)})(C^{(i)} z_i + D^{(i)})^{-1}.$$

Для случая, когда $r = p/n = 1$, эта группа была указана Гильбертом ([3]).

Аналогично тому как это сделано в работах Зигеля, можно построить фундаментальную область. При этом приходится существенно использовать принадлежащую Умберту ([4]) теорию приведения квадра-

* Две группы Γ_1 и Γ_2 называются соизмеримыми, если их пересечение имеет в каждой конечный индекс.

тичных форм над полями алгебраических чисел. Отличие от случая, рассмотренного Зигелем, заключается в том, что фундаментальная область может выходить на границу нашего многообразия не только в бесконечности. Отметим, что О. Блюменталь ([3]) ошибочно утверждал для случая группы Гильберта, что фундаментальная область выходит на границу лишь в бесконечности. Можно показать, что число точек выхода фундаментальной области для группы Гильберта на остов границы (остовом называется множество точек, для которых $\operatorname{Im} z_1 = \ldots = \operatorname{Im} z_n = 0$), равно числу классов поля. Это обстоятельство усложняет доказательство теоремы об алгебраических соотношениях.

Мы не можем определить модулярную форму веса g просто как регулярную в $H_{\mathfrak{A}}$ функцию, удовлетворяющую функциональному уравнению

$$\varphi(\tilde{z}) = \prod_{k=1}^{n} |C^{(k)} z_k + D^{(k)}|^g \varphi(z),$$

где

$$\tilde{z} = (\tilde{z}_1, \ldots, \tilde{z}_n), \quad \tilde{z}_k = (A^{(k)} z_k + B^{(k)}) (C^{(k)} z_k + D^{(k)})^{-1}.$$

Необходимо наложить дополнительные ограничения на поведение модулярной формы при приближении к точкам выхода фундаментальной области на границу. Сформулируем это ограничение для случая группы Гильберта. Пусть $\alpha_1 = (\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{1n}), \ldots, \alpha_h = (\alpha_{h1}, \ldots, \alpha_{hn})$ — точки выхода фундаментальной области на границу, отличные от бесконечности. Потребуем, чтобы: 1) для любого i функция $\varphi(z) \prod_{k=1}^{n} (z - \alpha_{ik})^g$ была ограничена в области вида $\operatorname{Im}(z - \alpha_{ik})^{-1} > \lambda$, $k = 1, \ldots, n$; 2) $\varphi(z)$ ограничена в области $\operatorname{Im} z_k > \lambda$ (λ — любое положительное число).

Далее, согласно Зигелю, мы определяем модулярную функцию как функцию, которую можно представить в виде отношения модулярных форм одинакового веса. Можно доказать, что поле модулярных функций есть поле алгебраических функций от $m = nr(r+1)/2$ неизвестных. Укажем, наконец, на связь, существующую между модулярными функциями Зигеля и модулярными функциями в $H_{\mathfrak{A}}$.

Рассмотрим некоторое представление поля k рациональными матрицами порядка p. Пусть матрица M соответствует числу ϑ, порождающему поле k. Тогда можно показать, что $H_{\mathfrak{A}}$ аналитически эквивалентно множеству точек Z обобщенной верхней полуплоскости, для которых $ZM = M'Z$. Рассмотрим те преобразования из модулярной группы, действующей в H, которые переводят это множество в себя. Можно показать, что они составляют подгруппу конечного индекса в $\Gamma_{\mathfrak{A}}$. Таким образом, если $\varphi(Z)$ — модулярная форма в H, то она будет модулярной формой в $H_{\mathfrak{A}}$ относительно некоторой подгруппы конечного индекса группы $\Gamma_{\mathfrak{A}}$. Это обстоятельство позволяет переносить ряд теорем, доказанных для модулярных функций Зигеля, на модулярные функции, рассмотренные в настоящей заметке.

В частности, эти соображения позволяют установить рациональность коэффициентов в разложениях модулярных форм в ряды Фурье.

Отметим еще, что указанные в настоящей заметке модулярные функции связаны с сингулярными абелевыми функциями с алгеброй умножений, изоморфной абсолютно вещественному полю алгебраических чисел, так же, как построенные Зигелем модулярные функции связаны с общими абелевыми функциями.

В заключении выражаю благодарность А. О. Гельфонду и И. Р. Шафаревичу за внимание, проявленное ими к настоящей заметке.

Поступило
15 XII 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] C. L. Siegel, Math. Ann., **116**, H. 5, 617 (1939). [2] A. A. Albert, Ann. of Math., **35**, No. 3, 500 (1934). [3] O. Blumental, Math. Ann., **56**, 509 (1903). [4] P. Humbert, Commentarii Math. Helv., **12**, 263 (1940).