

В. Б. ЛИДСКИЙ

**О ЧИСЛЕ РЕШЕНИЙ С ИНТЕГРИРУЕМЫМ КВАДРАТОМ СИСТЕМЫ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

$$-y'' + P(t)y = \lambda y$$

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 14 I 1954)

Рассматривается система k линейных дифференциальных уравнений, которая в матрично-векторной форме имеет вид:

$$-y''(t) + P(t)y(t) = \lambda y(t), \quad (1)$$

где $y(t)$ — k -мерный вектор с компонентами $(y_1(t), y_2(t), \dots, y_k(t))$; $P(t)$ — вещественная симметрическая матрица с суммируемыми в каждом конечном интервале элементами; λ — комплексный параметр; t — вещественный параметр, $0 \leq t \leq \infty$.

В работе рассматривается вопрос о числе линейно независимых решений системы (1) при не вещественном λ с интегрируемым квадратом длины на интервале $(0, \infty)$, т. е. таких, что

$$\int_0^{\infty} \sum_{s=1}^k y_s(t) \bar{y}_s(t) dt < \infty. \quad (2)$$

Аналогично тому, как это делается в случае одного уравнения вида (1) (см., например, (1)), можно доказать следующий факт*:

При всяком не вещественном λ существует не менее k линейно независимых решений системы (1) с интегрируемым квадратом на интервале $(0, \infty)$.

В настоящей работе даются условия на матрицу $P(t)$, достаточные для того, чтобы число линейно независимых решений с интегрируемым квадратом при не вещественном λ в точности равнялось k (теорема 1). Кроме того, приводится достаточное условие, при котором все решения системы (1) удовлетворяют условию (2) (теорема 2). Как известно, исследуемые вопросы тесно связаны с задачей расширения симметрического оператора, порожденного системой (1), до гипермаксимального.

Теорема 1. Пусть $(P(t)h, h) \geq -q(t)(h, h)**$ при любом k -мерном векторе h , где непрерывная функция $q(t) > \delta > 0$ и

$$\int_0^{\infty} \frac{dt}{Vq(t)} = \infty. \quad (a)$$

* Этот факт может быть установлен также на основании результатов С. А. Орлова (3).

** Здесь, как и в дальнейшем, (g, h) — скалярное произведение двух векторов g и h : $(g, h) = \sum g_s \bar{h}_s$.

Пусть, далее, $q(t)$ удовлетворяет одному из двух условий: либо 1) $q(t)$ — монотонная функция t ; либо 2) $q(t)$ дифференцируема и $\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{|q'(t)|}{q^{3/2}(t)} < \infty$. Тогда система уравнений $-y'' + P(t)y = \lambda y$ при любом не вещественном λ имеет точно k линейно независимых решений с интегрируемым квадратом на интервале $(0, \infty)$.

Сформулированная теорема является аналогом теоремы Сирса (2), доказанной им для случая одного уравнения (1).

Приведем доказательство теоремы 1, в ходе которого мы существенно используем результаты работы (2).

Заметим, что для любых двух решений системы (1) $y^{(1)}(t)$ и $y^{(2)}(t)$ выражение $\sum_{s=1}^k (y_s^{(1)'}(t) y_s^{(2)}(t) - y_s^{(1)}(t) y_s^{(2)'}(t))$ не зависит от t , в чем легко убедиться дифференцированием. Если через $[g, h]$ обозначить $\sum g_s h_s$, где g_s и h_s — компоненты векторов g и h , то приведенная выше сумма переписется так: $[I\tilde{y}^{(1)}(t), \tilde{y}^{(2)}(t)]$. В этой формуле \tilde{y} обозначает $2k$ -мерный вектор вида $\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$, а матрица I порядка $2k$ имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$ (E — единичная матрица). Пусть теперь число линейно независимых решений системы (1) с интегрируемым квадратом равно $m > k$. Покажем, что среди них найдутся два таких $y^{(1)}(t)$ и $y^{(2)}(t)$, что $[I\tilde{y}^{(1)}(t), \tilde{y}^{(2)}(t)] \neq 0$. В самом деле, зафиксируем какое-нибудь значение $t = t_0$ и рассмотрим алгебраическую систему m линейных однородных уравнений с $2k$ неизвестными:

$$[I\tilde{y}^{(s)}(t_0), u] = 0 \quad (s = 1, \dots, m; m > k), \quad (3)$$

где $\tilde{y}^{(s)}(t_0)$ — векторы, соответствующие решениям с интегрируемым квадратом, а u — $2k$ -мерный вектор, компонентами которого являются неизвестные числа системы (3). Так как I — невырожденная матрица и $\tilde{y}^{(s)}(t_0)$ линейно независимы, то ранг матрицы системы (3) равен m , а пространство решений поэтому имеет размерность $2k - m < k$, что делает невозможным одновременное выполнение равенств $[I\tilde{y}^{(s)}(t_0), \tilde{y}^{(r)}(t_0)] = 0$ ($s, r = 1, \dots, m$) из-за линейной независимости векторов $\tilde{y}^{(r)}(t_0)$.

Таким образом, если число линейно независимых решений с интегрируемым квадратом системы (1) больше, чем k , то среди них найдутся два таких $y^{(1)}(t)$ и $y^{(2)}(t)$, что $[I\tilde{y}^{(1)}(t), \tilde{y}^{(2)}(t)] \neq 0$. Это обстоятельство приведет нас к противоречию с условиями теоремы. Очевидно, можно считать: $[I\tilde{y}^{(1)}(t), \tilde{y}^{(2)}(t)] = 1$.

Согласно условию (а) теоремы 1 имеем:

$$\begin{aligned} \infty &= \int_0^{\infty} \frac{dt}{Vq(t)} = \int_0^{\infty} \frac{[I\tilde{y}^{(1)}(t), \tilde{y}^{(2)}(t)]}{Vq(t)} dt = \\ &= \int_0^{\infty} \frac{\sum_{s=1}^k (y_s^{(1)'}(t) y_s^{(2)}(t) - y_s^{(1)}(t) y_s^{(2)'}(t))}{Vq(t)} dt. \end{aligned} \quad (4)$$

Для оценки правой части (4) воспользуемся утверждением, доказанным Сирсом (2) для случая одного уравнения (1), которое без изменения переносится на случай системы.

Пусть $(P(t)h, h) \geq -q(t)(h, h)$ и непрерывная функция $q(t) > \delta > 0$ удовлетворяет либо условию 1) либо 2) теоремы 1. Тогда, если

вектор $y(t)$ есть решение системы (1) с интегрируемым квадратом, т. е. $\int_0^{\infty} (y, y) dt < C_1$, то

$$\int_0^{\infty} \frac{(y', y')}{q(2t)} dt < C_2 \text{ при условии 1); } \int_0^{\infty} \frac{(y', y')}{\sqrt{q(t)}} < C_3 \text{ при условии 2)}$$

$(C_1, C_2, C_3 < \infty)$.

Оценим теперь правую часть (4) по формуле Коши — Буняковского

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^{\infty} \frac{\sum_{s=1}^h (y_s^{(1)'}(t) y_s^{(2)}(t) - y_s^{(1)}(t) y_s^{(2)'}(t))}{\sqrt{q(t)}} dt \right| \leq \\ & \leq \left| \int_0^{\infty} \frac{\sum_{s=1}^h y_s^{(1)'}(t) y_s^{(2)}(t)}{\sqrt{q(t)}} dt \right| \left| \int_0^{\infty} \frac{\sum_{s=1}^h (y_s^{(1)}(t) y_s^{(2)'}(t))}{\sqrt{q(t)}} dt \right| \leq \\ & \leq \sqrt{\int_0^{\infty} (y^{(2)}, y^{(2)}) dt} \cdot \sqrt{\int_0^{\infty} \frac{(y^{(1)'}, y^{(1)'})}{q(t)} dt} + \\ & + \sqrt{\int_0^{\infty} (y^{(1)}, y^{(1)}) dt} \cdot \sqrt{\int_0^{\infty} \frac{(y^{(2)'}, y^{(2)'})}{q(t)} dt} < C \cdot \infty. \end{aligned}$$

Получившееся противоречие доказывает теорему.

Теорема 2. Пусть элементы матрицы $P(t)$ дифференцируемы и при произвольном постоянном векторе h и всех $t > a$ имеют место неравенства:

$$(P(t)h, h) < 0; \quad (P'(t)h, h) \leq \frac{2 + \varepsilon}{t} (P(t)h, h) \quad (\varepsilon > 0). \quad (5)$$

Тогда все решения системы (1) — с интегрируемым квадратом на интервале $(0, \infty)$.

Эту теорему достаточно доказать в предположении $\lambda = 0$, ибо, как нетрудно показать, если при некотором λ система (1) имеет все решения с интегрируемым квадратом, то то же самое имеет место при любом λ .

Доказательству теоремы предположим следующую лемму.

Лемма. Если вещественная симметрическая матрица $Q(t)$ с дифференцируемыми элементами такова, что $(Q(t)h, h) < 0$ и $(Q'(t)h, h) \leq 0$ при любом h и всех $t > a$, то все решения системы

$$-y'' + Q(t)y = 0 \quad (6)$$

ограничены при $t \rightarrow \infty$.

Доказательство леммы. В силу условий леммы матрица $Q(t)$ невырождена, поэтому $Q^{-1}(t)$ существует. Применяя к обеим частям (6) матрицу $-Q^{-1}(t)$, получим $Q^{-1}(t)y'' - y = 0$. Умножим это равенство скалярно на y' и сложим с комплексно сопряженным. В результате будем иметь:

$$(Q^{-1}y'', y') + (Q^{-1}y', y'') - (y, y') - (y', y) = 0. \quad (7)$$

Замечая теперь, что $(y, y') + (y', y) = (y, y')$ и $(Q^{-1}y'', y') + (Q^{-1}y', y'') = (Q^{-1}y', y') - ((Q^{-1})' y', y')$, проинтегрируем (7) на интервале (a, t) ; это приведет нас к соотношению:

$$(Q^{-1}(t)y'(t), y'(t)) - \int_a^t ((Q^{-1}(t))' y', y') dt - (y(t), y(t)) + \text{const} = 0. \quad (8)$$

Заметим, что $(Q^{-1}(t)y'(t), y'(t)) < 0$, так как $Q^{-1}(t)$ — отрицательно-определенная матрица вместе с $Q(t)$. Покажем также, что

$$-\int_a^t ((Q^{-1}(t))' y', y') dt \leq 0.$$

Используя формулу:

$$(Q^{-1}(t))' = -Q^{-1}(t)Q'(t)Q^{-1}(t),$$

которую легко получить, дифференцируя тождество $Q(t)Q^{-1}(t) = E$, будем иметь

$$-\int_a^t ((Q^{-1}(t))' y', y') dt = \int_a^t (Q'(t)Q^{-1}(t)y'(t), Q^{-1}(t)y'(t)) dt \leq 0,$$

ибо $(Q'(t)h, h) \leq 0$ по условию леммы.

Таким образом, все переменные слагаемые, стоящие в левой части (8), неположительны, и, значит, ни одно из них, в том числе и $-(y(t), y(t))$ не может быть неограниченным. Лемма доказана.

Переходим к доказательству теоремы. Сделаем в системе

$$-y'' + P(t)y = 0 \quad (9)$$

подстановку

$$y = \omega\eta, \quad \xi = \int_a^t \omega^{-2} dt,$$

где $\eta(\xi)$ — вектор, а ξ и ω — скалярные функции. Тогда система (9) перейдет в следующую:

$$-\frac{d^2\eta}{d\xi^2} + \left(-\frac{d^2\omega}{dt^2}E + \omega P\right)\omega^3\eta = 0. \quad (10)$$

Если теперь в качестве $\omega(t)$ выбрать функцию с интегрируемым квадратом на интервале $(0, \infty)$ и на матрицу коэффициентов $Q(\xi) = \left(-\frac{d^2\omega}{dt^2}E + \omega P\right)\omega^3$ системы (10) наложить условия леммы, обеспечивающие ограниченность решений $\eta(\xi)$, то в силу соотношения $y = \omega\eta$ все решения системы (9) при выполнении этих условий будут с интегрируемым квадратом.

В доказываемой теореме мы полагаем $\omega(t) = t^{-1/2-\varepsilon}$, где $\varepsilon > 0$. При этом получаются условия более громоздкие, хотя и менее ограничительные, чем (5). Для получения условий (5) следует воспользоваться, кроме того, тем фактом, что если к матрице $Q(t)$ системы $-y'' + Q(t)y = 0$, все решения которой ограничены, прибавить матрицу с интегрируемой нормой на интервале $(0, \infty)$, то все решения такой системы останутся ограниченными.

В заключение приношу благодарность проф. И. М. Гельфанду и проф. М. А. Наймарку за постановку задачи.

Поступило
14 I 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Б. М. Левитан, Разложение по собственным функциям, 1950. ² D. V. Sears, Canad. J. Math., 2, 314 (1950). ³ С. А. Орлов, ДАН, 92, № 3 (1953).