Доклады Академии Наук СССР
1954. Том XCV, № 2

МАТЕМАТИКА

Д. Л. БЕРМАН

О НЕКОТОРЫХ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАЦИЯХ, ПЕРЕВОДЯЩИХ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ В ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОЛИНОМЫ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 16 I 1954)

1°. В настоящей заметке мы будем пользоваться обозначениями из (1). Пусть E_1 и E_2 — пространства типа E. Через $U_{n,m}(f)$ мы обозначим линейную операцию из E_1 в E_2, обладающую следующими свойствами: 1) для любой $f \in E_1$ $U_{n,m}(f)$ есть тригонометрический полином порядка не выше $n+m$; 2) если T — тригонометрический полином порядка не выше n, то

$$U_{n,m}(T) = \int_0^{2\pi} T(x+t)\,\Phi(t)\,dt, \tag{1}$$

где $\Phi(t)$ — заданный тригонометрический полином порядка $n+m$. Частный случай операции $U_{n,m}(f)$, когда $m=0$, изучался в работах (1,2,5-6).

Если в качестве полинома $\Phi(t)$ взять ядро Валле-Пуссена $V_{n,m}(t)$

$$V_{n,m}(t) = \frac{1}{\pi(m+1)} \sin\left(n + \frac{m+1}{2}\right) t \sin\frac{m+1}{2} t : \sin^2\frac{t}{2},$$

то равенство (1) принимает вид

$$U_{n,m}(T) \equiv T(x) \tag{2}$$

для любого тригонометрического полинома T порядка не выше n. Операции $U_{n,m}(f)$ со свойством (2) изучались в (4). Важнейшей операцией вида $U_{n,m}(f)$ со свойством (2) является частная сумма Валле-Пуссена

$$\sigma_{n,m}^{(V)}(f) = \frac{1}{m+1} \sum_{k=n+1}^{n+m} s_k(f), \tag{3}$$

где $s_k(f)$ — частная сумма порядка k ряда Фурье функции $f(x)$. К операциям вида $U_{n,m}(f)$ со свойством (2) относятся также некоторые интерполяционные процессы С. Н. Бернштейна (3).

2°. Простейшей операцией вида $U_{n,m}(f)$ из E_1 в E_2 является операция

$$\sigma_{n,m}^{(\Phi)}(f) = \int_0^{2\pi} f(x+t)\,\Phi(t)\,dt, \quad f \in E_1. \tag{4}$$

Положим $f_t = f_t(x) = f(x+t)$, где x рассматривается как независимая переменная, $-\infty < x < \infty$, а t — как параметр, $-\infty < t < \infty$.

Теорема 1. *Для любой функции* $f \in E_1$ *можно указать множество* M, *состоящее по крайней мере из* $2n+2$ *точек интервала* $[0, 2\pi)$, *такое, что для любой точки* $x \in M$ *справедливо равенство*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [U_{n,m}(f_t, x)]_{-t}\, dt = \sigma^{(\varphi)}_{n,m}(f, x), \tag{5}$$

где символ $U_{n,m}(f_t, x)$ *означает значение операции* $U_{n,m}(f_t)$ *в точке* x.

Сформулируем сначала следующую лемму:

Лемма. *Для любой* $f \in E_1$ *справедливо равенство*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \{U_{n,m}[f_t - s_{n+m}(f_t)]\}_{-t}\, dt = 0. \tag{6}$$

Наметим ход доказательства (6). Непосредственно видно, что для любой функции тригонометрической системы $\{\cos kx\}_{k=0}^{\infty}$ и $\{\sin kx\}_{k=1}^{\infty}$ равенство (6) справедливо. Значит, (6) справедливо для любого тригонометрического полинома. Но любую функцию $f \in E_1$ можно сколько угодно точно приблизить при помощи полинома в метрике E_1. Следовательно, (6) верно для любой $f \in E_1$ (это рассуждение более подробно изложено в ([1])).

Переходим к доказательству теоремы 1. Рассмотрим величину

$$Q = Q(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [U_{n,m}(f_t, x)]_{-t}\, dt.$$

Из линейности $U_{n,m}$ и из леммы следует, что

$$Q = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \{U_{n,m}[s_{n+m}(f_t)]\}_{-t}\, dt. \tag{7}$$

Очевидно, что

$$U_{n,m}[s_{n+m}(f_t)] = U_{n,m}[s_n(f_t)] + U_{n,m}[s_{n+m}(f_t) - s_n(f_t)]. \tag{8}$$

Но $s_n(f_t)$ — тригонометрический полином порядка n. Значит,

$$\{U_{n,m}[s_n(f_t)]\}_{-t} = \{\sigma^{(\Phi)}_{n,m}[s_n(f_t)]\}_{-t} = \sigma^{(\Phi)}_{n,m}[s_n(f)]. \tag{9}$$

Стало быть, из (7), (8) и (9) вытекает, что

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [U_{n,m}(f_t)]_{-t}\, dt =$$

$$= \sigma^{(\varphi)}_{n,m}[s_n(f)] + \frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{n+m} (A_k^{(U,f)} \cos kx + B_k^{(U,f)} \sin kx), \tag{10}$$

где числа $\{A_k^{(U,f)}\}_{k=n+1}^{n+m}$ и $\{B_k^{(U,f)}\}_{k=n+1}^{n+m}$ вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} A_k^{(U,f)} &= a_k(c_k^{(1)} - s_k^{(2)}) + b_k(s_k^{(1)} - c_k^{(2)}); \\ B_k^{(U,f)} &= a_k(c_k^{(2)} - s_k^{(1)}) + b_k(s_k^{(2)} + c_k^{(1)}). \end{aligned} \tag{11}$$

При этом a_k и b_k, $c_k^{(1)}$ и $c_k^{(2)}$, $s_k^{(1)}$ и $s_k^{(2)}$ суть коэффициенты Фурье порядка k, соответственно, для функций $f(x)$, $U_{n,m}(\cos kx)$, $U_{n,m}(\sin kx)$.

Так как операция (4) типа $U_{n,m}$, то из (10), в частности, следует, что

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[\sigma_{n,m}^{(\Phi)}(f_t)]_{-t}\,dt =$$

$$= \sigma_{n,m}^{(\Phi)}[s_n(f)] + \frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{n+m}(A_k^{(\sigma(\Phi),f)}\cos kx + B_k^{(\sigma(\Phi),f)}\sin kx). \qquad (10')$$

Следовательно,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[U_{n,m}(f_t)]_{-t}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\sigma_{n,m}^{(\Phi)}(f_t)]_{-t}\,dt + P(x), \qquad (12)$$

где $P(x)$ — тригонометрический полином, у которого первые $(2n+1)$ коэффициентов Фурье равны нулю. Стало быть, $P(x)$ имеет в интервале $[0,2\pi)$ не менее, чем $2n+2$ вещественных и различных корней.

Обозначим через M множество корней полинома $P(x)$. Из (12) видно, что для любой $x \in M$ справедливо равенство

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[U_{n,m}^{(\Phi)}(f_t)]_{-t}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[\sigma_{n,m}^{(\Phi)}(f_t)]_{-t}\,dt. \qquad (13)$$

Но $\sigma_{n,m}^{(\Phi)}(f_t) = (\sigma_{n,m}^{(\Phi)}(f))_t$. Значит, $[\sigma_{n,m}(f_t)]_{-t} = \sigma_{n,m}(f)$. Поэтому из (13) вытекает (5).

Если $m=0$, то равенство (5) имеет место при всех x, ибо обе части равенства (5) представляют тригонометрические полиномы порядка n, совпадающие в $2n+2$ различных точках. Таким образом, из теоремы 1 вытекает теорема 1 из ([1]). Из формул (11) следует, что если $a_k = b_k = 0$, $n+1 \leqslant k \leqslant n+m$, то $P(x) \equiv 0$. Значит, из (12) видно, что в этом случае во всех точках числовой оси справедливо (5). Итак, имеет место следующая теорема:

Теорема 2. *Если $U_{n,m}(f)$ переводит E_1 в E_2 и функция $f \in E_1$ обладает тем свойством, что ее коэффициенты Фурье a_k и b_k равны нулю при $m+1 \leqslant k \leqslant n+m$, то справедлива формула* (5).

Обозначим через Ξ множество функций f пространства E_1, обладающих тем свойством, что $\|f\|_{E_1} \leqslant 1$ и для любой $f \in \Xi$ $a_k = b_k = 0$ при $n+1 \leqslant k \leqslant n+m$. Тогда справедлива теорема.

Теорема 3. *Если $U_{n,m}(f)$ переводит E_1 в E_2, то*

$$\sup_{f\in\Xi}\|U_{n,m}(f)\| \geqslant \sup_{f\in\Xi}\|\sigma_{n,m}^{(\Phi)}(f)\|_{E_2}.$$

Доказательство теоремы 3 почти не отличается от доказательства теоремы 2 из ([1]).

Из теоремы 3 вытекает, что частные суммы Валле-Пуссена (3) обладают следующим экстремальным свойством:

Теорема 4. *Среди всех операций вида $U_{n,m}(f)$, переводящих E_1 в E_2 и обладающих свойством* (2), *частные суммы Валле-Пуссена $\sigma_{n,m}^{(V)}(f)$ отличаются тем экстремальным свойством, что для них величина $\sup_{f\in\Xi}\|U_{n,m}(f)\|$ достигает наименьшего значения, т. е.*

$$\sup_{f\in\Xi}\|U_{n,m}(f)\| \geqslant \sup_{f\in\Xi}\|\sigma_{n,m}^{(V)}(f)\|_{E_2}.$$

З а м е ч а н и е. Очевидно, что

$$\| U_{n,m} \| \geqslant \sup_{f \in \Xi} \| U_{n,m}(f) \|_{E_2} .$$

Стало быть,

$$\| U_{n,m} \| \geqslant \sup_{f \in \Xi} \| \sigma_{n,m}^{(\Phi)}(f) \|_{E_2}.$$

В частности, если $U_{n,m}$ обладает свойством (2), то

$$\| U_{n,m} \| \geqslant \sup_{f \in \Xi} \| \sigma_{n,m}^{(V)}(f) \|_{E_2}. \tag{14}$$

Пользуясь работой [7], неравенством (14) и разложением функции $\operatorname{sign} V_{n,m}(x)$ в ряд Фурье, можно получить следующий результат:

Т е о р е м а 5. *Если операция типа $U_{n,m}(f)$, переводящая $\tilde{C}$ в $\tilde{C}$, обладает свойством* (2), *то*

$$\| U_{n,m} \| \geqslant \frac{4}{\pi^2} \ln \frac{n+m+1}{m+1} + \frac{8}{\pi^2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\ln \nu}{4\nu^2 - 1} + \tag{15}$$

$$+ \frac{4}{\pi^2}(3 \ln 2 + \gamma) - \frac{m+2}{2n+m+1} \ln \frac{n+m+1}{m+1} + O\left(\frac{m+1}{n+m+1} \right); \quad m < n.$$

Константа $4/\pi^2$ из первого слагаемого правой части (15) *точная* *.

Теорема 5 уточняет результат В. Ф. Николаева [4]. Точно значение константы в оценке (15) было также установлено несколько иным путем С. Б. Стечкиным.

Поступило
14 IX 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Д. Л. Б е р м а н, ДАН, 88, № 1 (1953). [2] Д. Л. Б е р м а н, ДАН, 85, № 1 (1952). [3] С. Н. Б е р н ш т е й н, Изв. ОМЕН АН СССР, № 9, 1151 (1931). [4] В. Ф. Н и к о л а е в, ДАН, 64, № 4 (1949). [5] С. М. Л о з и н с к и й, ДАН, 64, № 4 (1949). [6] С. М. Л о з и н с к и й, ДАН, 89, № 5 (1953) [7] С. Б. С т е ч к и н, ДАН, 80, № 4 (1951).

* γ — константа Эйлера.