

МОСКОВСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА, ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ
И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ им. М.В.ЛОМОНОСОВА

НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ

Ю.Д.Черниченко

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА
ДЛЯ
НЕЛОКАЛЬНЫХ СЕПАРАБЕЛЬНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

Препринт НИИЯФ МГУ-88-27/48.

Москва

1988

На основе релятивистского квазипотенциального подхода к квантовой теории поля предложен метод восстановления не-локального сепарабельного взаимодействия двух бесспиновых частиц равных масс по фазовому сдвигу и энергиям связанных состояний.

© НИИ ядерной физики МГУ, 1988

Уравнение Шредингера с нелокальным сепарабельным двух-частичным взаимодействием может быть легко решено и для большого класса таких потенциалов дает замкнутые выражения. Это обстоятельство часто использовалось в ядерной физике и в проблеме многих тел и, в частности, при решении уравнений Фаддеева в задаче трех тел. Этот же подход оказался плодотворным и при решении обратной задачи /1/. Однако, этот подход не может быть применен для существенно релятивистских систем, таких, например, как системы, образованные легкими кварками. В этом случае может быть использован квазипотенциальный подход к квантовой теории поля /2/.

В настоящее время существует несколько вариантов квазипотенциальных уравнений. Здесь будем основываться на конечно-разностном варианте квазипотенциального метода, предложенного в /3/ на основе гамильтоновой формулировки квантовой теории поля /4/.

Цель данной работы - решение обратной задачи, т.е. задачи о восстановлении нелокального сепарабельного взаимодействия двух бесспиновых частиц равных масс m на основе квазипотенциального уравнения в релятивистском конфигурационном представлении /5, 6/.

В первом разделе рассмотрено решение прямой задачи, получено выражение для фазового сдвига и сформулирована теорема Левинсона для связанных состояний в случае нелокальных сепарабельных квазипотенциалов. Решению обратной задачи посвящен второй раздел работы. В заключении подводятся итоги проведенному рассмотрению. Всюду используется система единиц, в которой $\hbar = c = m = 1$.

1. Прямая задача

Для решения прямой задачи будем исходить из конечно-разностного квазипотенциального уравнения для волновой функции $\Psi_q(\vec{r})$, записанного в релятивистском конфигурационном представлении /6/ с нелокальным квазипотенциалом $V(\vec{r}, \vec{r}')$,

$$\left[2\text{ch}\chi - 2\text{ch}\left(i\frac{d}{dr}\right) - \frac{2i}{r} \text{sh}\left(i\frac{d}{dr}\right) + \frac{1}{r^2} \Delta_{\theta, \varphi} \right] \Psi_q(\vec{r}) = \int d\vec{r}' V(\vec{r}, \vec{r}') \Psi_q(\vec{r}'), \quad (1)$$

$$\cdot \exp\left(i\frac{d}{dr}\right) \Psi_q(\vec{r}) = \int d\vec{r}' V(\vec{r}, \vec{r}') \Psi_q(\vec{r}'),$$

где $\Delta_{\theta, \varphi}$ - угловая часть оператора Лапласа; r - модуль релятивистской относительной координаты \vec{r} ; $q_0 = \text{ch } \chi = \sqrt{\vec{q}^2 + 1}$ есть нулевая компонента Ψ -импульса, принадлежащего верхней полке гиперboloида $q_0^2 - \vec{q}^2 = 1$, т.е. массовой поверхности одной релятивистской частицы массы $m = 1$.

Для сепарабельного взаимодействия справедливо представление

$$V(\vec{r}, \vec{r}') = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sum_{n=1}^{N_l} \varepsilon_{nl} V_{nl}(r) V_{nl}(r') P_l\left(\frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r r'}\right).$$

Теперь, разложив волновую функцию по частичным волнам

$$\Psi_q(\vec{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l \frac{\Psi_l(\chi, r)}{r} P_l\left(\frac{\vec{q} \cdot \vec{r}}{q r}\right),$$

уравнение (1) преобразуется к виду

$$\left[2 \text{ch}\left(i \frac{d}{dr}\right) + \frac{l(l+1)}{r^{(2)}} \exp\left(i \frac{d}{dr}\right) - 2 \text{ch } \chi \right] \Psi_l(\chi, r) + \sum_{n=1}^{N_l} \varepsilon_{nl} V_{nl}(r) \int_0^{\infty} dr' V_{nl}(r') \Psi_l(\chi, r') = 0, \quad (2)$$

где $V_{nl}(r) = \sqrt{4\pi} r U_{nl}(r)$, $r^{(2)} = r(r+i)$.

В дальнейшем ограничимся случаем, когда каждому l соответствует только один сепарабельный член ($N_l = 1$). Тогда уравнение (2) принимает вид

$$\left[2 \text{ch}\left(i \frac{d}{dr}\right) + \frac{l(l+1)}{r^{(2)}} \exp\left(i \frac{d}{dr}\right) - 2 \text{ch } \chi \right] \Psi_l(\chi, r) + \varepsilon_l V_l(r) \int_0^{\infty} dr' V_l(r') \Psi_l(\chi, r') = 0, \quad (3)$$

где $V_l(r) = \sqrt{4\pi} r U_l(r)$, $\varepsilon_l = \pm 1$.

В начале рассмотрим S -волну ($l = 0$). В этом случае решение уравнения

$$\left[\text{ch}\left(i \frac{d}{dr}\right) - \text{ch } \chi \right] \Psi(\chi, r) + \frac{1}{2} \varepsilon \mathcal{N}(\chi) V(r) = 0 \quad (4)$$

с граничным условием

$$\Psi(\chi, 0) = 0, \quad (5)$$

в котором

$$\mathcal{N}(\chi) = \int_0^{\infty} dr V(r) \Psi(\chi, r), \quad \varepsilon = \pm 1, \quad (6)$$

будем искать методом синус-преобразования Фурье, которое выберем в виде

$$\tilde{\Psi}(\chi, \rho) = \int_0^{\infty} dr \Psi(\chi, r) \sin(rp) / Q_0(\text{ch} p), \quad (7a)$$

$$\Psi(\chi, r) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} dp Q_0(\text{ch} p) \tilde{\Psi}(\chi, \rho) \sin(rp), \quad (7б)$$

$$\tilde{V}(\rho) = \int_0^{\infty} dr V(r) \sin(rp) / Q_0(\text{ch} p), \quad (7в)$$

$$V(r) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} dp Q_0(\text{ch} p) \tilde{V}(\rho) \sin(rp). \quad (7г)$$

Здесь $Q_l(z)$ – функция Лежандра второго рода. Применяя преобразования (7б, г) к уравнению (4), получим

$$(\text{ch} \chi - \text{ch} p) \tilde{\Psi}(\chi, \rho) = \frac{1}{2} \varepsilon \mathcal{N}(\chi) \tilde{V}(\rho), \quad (8a)$$

где

$$\mathcal{N}(\chi) = \int_0^{\infty} dr V(r) \Psi(\chi, r) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} dp Q_0^2(\text{ch} p) \tilde{V}(\rho) \tilde{\Psi}(\chi, \rho). \quad (8б)$$

Для существования единственного решения уравнения (8a) необходимо наложить следующее ограничение на функцию $V(r)$

$$rV(r) \in L_1(0, \infty). \quad (9)$$

Это условие означает, что функция $\tilde{V}(\rho)$ всюду непрерывна, а функция $Q_0(\text{ch} p) \tilde{V}(\rho)$ дифференцируема при всех $p > 0$. Более того, из (7в) следует, что

$$Q_0(\text{ch} p) \tilde{V}(\rho) = O(1), \quad |p| \rightarrow \infty, \quad (10a)$$

$$\tilde{V}(\rho) = O(1), \quad \rho \rightarrow 0, \quad (10б)$$

если только условие (9) выполнено.

Рассмотрим состояния рассеяния ($E = \text{ch} \chi \geq 1$). Тогда решение уравнения (8a) имеет вид

$$\tilde{\Psi}(\chi, \rho) = \frac{\pi}{2} \frac{\text{sh} \chi}{Q_0^2(\text{ch} \chi)} \delta(\text{ch} \chi - \text{ch} p) + \frac{1}{2} \varepsilon \mathcal{N}(\chi) P \frac{\tilde{V}(\rho)}{\text{ch} \chi - \text{ch} p}, \quad (II)$$

где P – символ главного значения.

Множитель перед δ -функцией выбран в соответствии с нормировкой волновой функции: при отсутствии взаимодействия представление (7б) должно приводить к выражению

$$\Psi(\chi, r) = \sin(r\chi) / Q_0(\text{ch} \chi) \equiv \sin(r\chi) / \chi.$$

После подстановки (II) в (7б) и (8б) получаем

$$\Psi(\chi, r) = \frac{\sin(r\chi)}{Q_0(\text{ch} \chi)} + \frac{1}{\pi} \varepsilon \mathcal{N}(\chi) P \int_0^{\infty} dp Q_0(\text{ch} p) \frac{\tilde{V}(\rho) \sin(rp)}{\text{ch} \chi - \text{ch} p}, \quad (12)$$

$$\mathcal{N}(X) = \tilde{V}(X) \left[1 + P \frac{1}{2} \int_0^{\infty} d\rho \frac{A(\rho)}{ch\rho - chX} \right]^{-1}, \quad (I3)$$

где

$$A(X) = \frac{2}{\pi} \varepsilon Q_0^2(cthX) \tilde{V}^2(X). \quad (I4)$$

Поскольку функция $\tilde{V}(\rho)$ дифференцируема, то, очевидно, главное значение интегралов существует, а в силу условий (I0а, б) все интегралы также сходятся и на обоих пределах.

Найдем асимптотику функции $\Psi(X, r)$ при больших значениях r . Это легко сделать, если записать (I2) в виде

$$\Psi(X, r) = \frac{\sin(rX)}{Q_0(cthX)} - \frac{1}{2} \varepsilon \mathcal{N}(X) \lim_{\gamma \rightarrow +0} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} d\rho Q_0(cth\rho) \times \\ \times \tilde{V}(\rho) e^{i\rho r} \left[\frac{1}{ch\rho - z_+} + \frac{1}{ch\rho - z_-} \right],$$

где $z_{\pm} = chX \pm i\eta$.

В результате будем иметь

$$\Psi(X, r) = \sin(rX)/Q_0(cthX) - \varepsilon \mathcal{N}(X) Q_0(cthX) sh^{-1}X \times \\ \times \tilde{V}(X) \cos(rX) + O(1), \quad r \rightarrow \infty. \quad (I5)$$

Теперь учтем, что для произвольного l асимптотика волновой функции $\Psi_l(X, r)$ имеет вид

$$\Psi_l(X, r) \sim \sin(rX - \frac{\pi l}{2})/Q_l(cthX) + \frac{tg \delta_l(X)}{Q_l(cthX)} \cos(rX - \frac{\pi l}{2}). \quad (I6)$$

Поэтому для $l = 0$ находим

$$tg \delta(X) = -\frac{\pi}{2} sh^{-1}X A(X) \left[1 + P \frac{1}{2} \int_0^{\infty} d\rho \frac{A(\rho)}{ch\rho - chX} \right]^{-1}. \quad (I7)$$

Заметим, что в силу оценки (I0а) интеграл в формуле (I7) абсолютно сходится. Кроме того, имея в виду оценку (I0б), заключаем, что фазовый сдвиг представляет собой хорошо определенную функцию при всех $X \geq 0$. Причем при $X \rightarrow 0$ он стремится к нулю как X .

Переходим к рассмотрению связанных состояний. Пусть существует связанное состояние с энергией $E_1 < 1$. В этом случае удобно пользоваться параметризацией

$$0 \leq E_1 = chX_1 = \cos \alpha_1 < 1, \quad (X_1 = i\alpha_1),$$

так что формула (8а) дает

$$\tilde{\Psi}(i\alpha_1, \rho) = -\frac{1}{2} \varepsilon \frac{\mathcal{N}(i\alpha_1)}{ch\rho - E_1} \tilde{V}(\rho). \quad (I8)$$

Подставив это выражение в (8б), получим уравнение для собственного значения

$$\varepsilon + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dp Q_0^2(\text{cth} p) \frac{\tilde{V}^2(p)}{\text{ch} p - E_1} = 0. \quad (19)$$

Теперь учтем, что

$$\frac{1}{2} \frac{Q_0^2(\text{cth} p)}{\text{ch} p - E_1} < 1$$

для любого $p \geq 0$. Поэтому, чтобы иметь связанное состояние с энергией $0 \leq E_1 < 1$, необходимо положить

$$\varepsilon = -1, \quad \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} dp \tilde{V}^2(p) > 1. \quad (20)$$

Таким образом, если условия (20) выполняются, то единственное связанное состояние с энергией $E_1 = \cos \chi_1$ определяется соотношением (19). При этом граничное условие (5), очевидно, выполняется, а асимптотика волновой функции, определяемая из (7б) и (18) при $\varepsilon = -1$, имеет вид

$$\Psi(i\chi_1, r) \sim e^{-\chi_1 r}, \quad r \rightarrow \infty.$$

Теперь рассмотрим связанные состояния с энергией $E_0 = \text{ch} \chi_0 > 1$. Решения в этом случае имеют вид (II) с опущенной δ -функцией, а уравнение для собственных значений

$$\varepsilon + \frac{1}{\pi} P \int_0^{\infty} dp Q_0^2(\text{cth} p) \frac{\tilde{V}^2(p)}{\text{ch} p - E_0} = 0 \quad (21)$$

может иметь решения для $\varepsilon = \pm 1$. Пусть такое решение существует. Тогда асимптотика волновой функции в соответствии с (15) дается выражением

$$\Psi(\chi_0, r) = -\frac{1}{\pi} \varepsilon \mathcal{N}(\chi_0) P \int_0^{\infty} dp Q_0(\text{cth} p) \frac{\tilde{V}(p)}{\text{ch} p - E_0} \sin(rp) = \quad (22)$$

$$= -\varepsilon \mathcal{N}(\chi_0) Q_0(\text{cth} \chi_0) \text{sh}^{-1} \chi_0 \tilde{V}(\chi_0) \cos(r\chi_0) + o(1), \quad r \rightarrow \infty.$$

Отсюда следует, что волновая функция асимптотически стремится к нулю, если только

$$\tilde{V}(\chi_0) = 0. \quad (23)$$

Условие (23) означает, что интеграл в формуле (22) есть регулярное, абсолютно сходящееся синус-преобразование Фурье, поведение которого определяется при $r \rightarrow \infty$ вкладом подынтегрального выражения вблизи точки $p = 0$. Учитывая это обстоятельство и оценку (10б), находим

$$\Psi(\chi_0, r) = 0(r^{-2}), \quad r \rightarrow \infty.$$

Поскольку граничное условие (5) тоже выполнено, то $E_0 = \text{ch} \chi_0$ соответствует связанному состоянию.

На основании полученных результатов и формулы (17) можно заключить, что при энергии связанного состояния E_0 фаза рассеяния проходит через значения πn (n - целое), убывая. Действительно, при энергии E_0 в силу условий (21) и (23) числитель и знаменатель правой части формулы (17) равны нулю. Но из определения (14) следует, что функция $A(\chi)$ имеет в точке χ_0 по крайней мере нуль второго порядка, в то время как знаменатель в формуле (17) - только простой нуль, поскольку

$$\frac{d}{d\chi} \left(1 + P \frac{1}{2} \int_0^{\infty} d\rho \frac{A(\rho)}{\text{ch}\rho - \text{ch}\chi} \right) \Big|_{\chi=\chi_0} = \frac{1}{2} \text{sh} \chi_0 \int_0^{\infty} d\rho \frac{A(\rho)}{(\text{ch}\rho - \text{ch}\chi_0)^2} > 0.$$

Отсюда заключаем, что $\text{tg} \delta(\chi)$ обращается в нуль в точке χ_0 и при этом меняет знак, т.е.

$$\delta(\chi_0) = \pi n, \quad \frac{d\delta(\chi)}{d\chi} \Big|_{\chi=\chi_0} < 0. \quad (24)$$

Более того, если знаменатель в формуле (17) не обращается в нуль при $\chi = \chi_0$, то фазовый сдвиг касается прямой $\delta = \pi n$ сверху или снизу, не пересекая ее. Если же и знаменатель обращается в нуль, то этот нуль может быть только нулем первого порядка. Поэтому фазовый сдвиг пересекает прямую $\delta = \pi n$ сверху. При этом условия (21) и (23) выполнены и тем самым имеется связанное состояние.

Итак, связанные состояния при энергии $E_0 \geq I$ даются общими корнями уравнений (21) и (23), что соответствует также значениям энергии, при которых фазовый сдвиг проходит через значения πn ($n = 0, \pm 1, \dots$) сверху вниз с отрицательной первой производной, и наоборот. Фазовый сдвиг может касаться прямой $\delta = \pi n$ сверху или снизу, но никогда не пересекает ее снизу вверх.

На основании оценки (10а) и формулы (17) заключаем, что $\text{tg} \delta(\infty) = 0$. Поэтому, выбрав $\delta(\chi)$ так, чтобы

$$\delta(\infty) = 0,$$

и учитывая, что фазовый сдвиг есть непрерывная функция по χ , приходим к теореме Левинсона для случая сепарабельного квазипотенциала ($\ell = 0$)

$$\delta(0) - \delta(\infty) = \delta(0) = (\nu + n)\pi, \quad (25)$$

где ν - число связанных состояний с энергией $E \geq I$; n - число связанных состояний с энергией $0 \leq E < I$ ($n = 0, 1$).

Отметим, что при больших χ знак фазового сдвига обратен знаку ε . Поэтому, установив фазовый сдвиг при высоких энергиях, можно найти ε .

Переходим к рассмотрению парциальных волн с $l > 0$. В этом случае вместо синус-преобразования Фурье необходимо применить релятивистское интегральное преобразование Ханкеля, связанное с функцией

$$S_l(\chi, r) = (-i)^{l+1} \sqrt{\frac{\pi}{2} \operatorname{sh} \chi} (-r)^{(l+1)} P_{-1/2-l}^{-1/2+ir}(\operatorname{ch} \chi),$$

где

$$r(l) = i^l \frac{\Gamma(-ir+l)}{\Gamma(-ir)},$$

являющуюся решением уравнения (3) при выключенном взаимодействии ($\xi_l \equiv 0$) и удовлетворяющую условиям ортонормированности полноты /6/

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} dr S_l(\chi, r) S_l^*(\chi', r) = \delta(\chi - \chi'),$$

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} d\chi S_l(\chi, r) S_l^*(\chi, r') = \delta(r - r').$$

Здесь $\Gamma(z)$ - гамма-функция, $P_{\mu}^{\nu}(z)$ - функция Лежандра первого рода.

Релятивистские интегральные преобразования Ханкеля, совпадающие при $l = 0$ с преобразованиями (7), выберем в виде

$$\tilde{\Psi}_l(\chi, \rho) = \int_0^{\infty} dr \Psi_l(\chi, r) S_l^*(\rho, r) / Q_l(\operatorname{cth} \rho), \quad (26a)$$

$$\Psi_l(\chi, r) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} d\rho Q_l(\operatorname{cth} \rho) \tilde{\Psi}_l(\chi, \rho) S_l(\rho, r), \quad (26б)$$

$$\tilde{V}_l(\rho) = \int_0^{\infty} dr V_l(r) S_l^*(\rho, r) / Q_l(\operatorname{cth} \rho), \quad (26в)$$

$$V_l(r) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} d\rho Q_l(\operatorname{cth} \rho) \tilde{V}_l(\rho) S_l(\rho, r). \quad (26г)$$

Теперь, повторяя рассуждения подобные тем, которые были про-

ведены для S -волны, получим результаты аналогичные случаю $l = 0$

$$\operatorname{tg} \delta_l(x) = -\frac{\pi}{2} \operatorname{sh}^{-1} x A_l(x) \left[1 + P \frac{1}{2} \int_0^{\infty} d\rho \frac{A_l(\rho)}{\operatorname{ch} \rho - \operatorname{ch} x} \right]^{-1}, \quad (27)$$

где

$$A_l(x) = \pm \frac{2}{\sqrt{\pi}} \varepsilon_l Q_l^2(\operatorname{cth} x) |\tilde{V}_l(x)|^2. \quad (28)$$

Причем, знак плюс отвечает действительному квазипотенциалу

$$V_l^*(r) = V_l(r),$$

что приводит к условию

$$\operatorname{Re} \tilde{V}_l(x) \cdot \operatorname{Im} S_l(x, r) + \operatorname{Im} \tilde{V}_l(x) \cdot \operatorname{Re} S_l(x, r) = 0. \quad (29)$$

В то же время знак минус соответствует чисто мнимому квазипотенциалу

$$V_l^*(r) = -V_l(r),$$

а это приводит к условию

$$\operatorname{Re} \tilde{V}_l(x) \cdot \operatorname{Re} S_l(x, r) - \operatorname{Im} \tilde{V}_l(x) \cdot \operatorname{Im} S_l(x, r) = 0. \quad (30)$$

Кроме того, связанному состоянию с энергией $0 \leq E_1 < I$ будет отвечать либо действительный квазипотенциал, и тогда $\varepsilon_l = -I$, либо чисто мнимый, и тогда $\varepsilon_l = +I$. Для связанных состояний с энергией $E_0 \gg I$, как и в случае S -волны, будем иметь $\varepsilon_l = \pm I$. И, наконец, теорема Левинсона для парциальных волн с $l > 0$ по форме совпадает с формулой (25)

$$\delta_l(0) - \delta_l(\infty) = \delta_l(0) = (\nu_l + n_l) \pi, \quad (31)$$

где ν_l - число связанных состояний с энергией $E \geq I$, n_l - число связанных состояний с энергией $0 \leq E_1 < I$, $n_l = -|l - I|, \dots, l + I$.

Последнее означает, что для $l > 0$ имеется l -кратное вырождение энергетического уровня E_1 .

2. Обратная задача

Для восстановления квазипотенциала $V_l(r)$ по фазовому сдвигу $\delta_l(x)$ нужно, чтобы последний удовлетворял всем требованиям, необходимым для решения этой задачи. Так, если при возрастании x фазовый сдвиг пересекает прямую πn , где n целое, снизу, то обратная задача решения не имеет.

Пусть фазовый сдвиг есть непрерывная по Гельдеру функция с некоторым положительным индексом и при $x \rightarrow +\infty$

$$\delta_l(x) = O(\operatorname{sh}^{-2} x), \quad l \geq 0, \quad \gamma > 0. \quad (32)$$

Эти условия необходимы и достаточны для того, чтобы квази-потенциал удовлетворял условию (9).

Вначале рассмотрим обратную задачу для $l = 0$. Тогда при $\xi = +I$ фазовый сдвиг, как было отмечено ранее, при больших значениях энергии должен быть малой, но отрицательной величиной. Поэтому возможные связанные состояния при значениях энергии $E \geq I$ находятся по значениям χ , при которых фазовый сдвиг пересекает снизу прямые $\delta = \pi n$, $n = 0, 1, 2, \dots$ при уменьшении χ от бесконечности. При $\chi = 0$ должно быть $\delta(0) = \pi V$. И для того чтобы найти квазипотенциал $V(r)$ по фазовому сдвигу, необходимо решить интегральное уравнение (I7) относительно функции $A(\chi)$. После этого по формуле (I4) находят функцию $\tilde{V}(\chi)$. Затем, выполнив Фурье-преобразование (7г), восстанавливают квазипотенциал $V(r)$. Для простоты рассмотрим случай $V = I$ (имеется одно связанное состояние). Введем обозначения

$$\Psi(x) = \frac{A(\operatorname{arch} x)}{g(x)} \left[1 + i \frac{\pi}{2} g(x)(x^2 - 1)^{-1/2} \right], \quad (33)$$

$$g(x) = -\frac{2}{\pi} (x^2 - 1)^{1/2} \operatorname{tg} \tilde{\delta}(x), \quad (34)$$

$$\tilde{\delta}(x) \equiv \delta(\operatorname{arch} x), \quad (35)$$

$$h(x) = \frac{\pi}{2} g(x)(x^2 - 1)^{-1/2} \left[1 - i \frac{\pi}{2} g(x)(x^2 - 1)^{-1/2} \right]^{-1} = -\sin \tilde{\delta}(x) \exp[-i \tilde{\delta}(x)], \quad (36)$$

где $x = \operatorname{ch} \chi$.

Тогда уравнение (I7) приводится к виду

$$\Psi(x) = 1 + \frac{1}{\pi} \int_1^{\infty} dy \frac{\Psi(y) h^*(y)}{y - x - i0}. \quad (37)$$

Для решения этого интегрального уравнения введем вспомогательную функцию

$$H(z) = 1 + \frac{1}{\pi} \int_1^{\infty} dy \frac{\Psi(y) h^*(y)}{y - z}.$$

Предположим, что функция $\Psi(x)$ непрерывна по Гельдеру и интеграл сходится. Тогда функция $H(z)$ аналитична в плоскости z с разрезом от 1 до $+\infty$. Кроме того,

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} H(z) = 1 \quad (38)$$

во всех направлениях. Следовательно, решение интегрального уравнения (37) будет иметь вид

$$\Psi(x) = H(x_+) \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} H(x+i\varepsilon), \quad 1 \leq x \leq \infty. \quad (39)$$

Воспользовавшись выражением для скачка функции $H(z)$ на разрезе

$$H(x_+) - H(x_-) = 2i\Psi(x)h^*(x) = -2i \sin \tilde{\delta}(x) e^{i\tilde{\delta}(x)} \Psi(x)$$

и решением (39), получаем однородное уравнение Римана-Гильберта для функции $H(z)$

$$H(x_+) e^{2i\tilde{\delta}(x)} - H(x_-) = 0, \quad 1 \leq x \leq \infty. \quad (40)$$

Частное решение этого уравнения, удовлетворяющего условию (38), имеет вид

$$H(z) = \exp[\omega(z)], \quad (41)$$

где

$$\omega(z) = -\frac{1}{\pi} \int_1^{\infty} dy \frac{\tilde{\delta}(y)}{y-z}. \quad (42)$$

Действительно, из сделанных выше предположений о поведении фазового сдвига следует, что

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \omega(z) = 0$$

во всех направлениях. Кроме того, функция $\omega(z)$ хорошо определена всюду на разрезе, за исключением, быть может, точки $z = 1$, где ее поведение определяется выражением

$$\omega(z) = \frac{1}{\pi} \tilde{\delta}(1) \ln|1-z| + \tilde{\omega}(z). \quad (43)$$

Здесь функция $\tilde{\omega}(z)$ при $z \rightarrow 1$ конечна, а $\tilde{\delta}(1) = \delta(0) = \pi$, т.к. имеется только одно связанное состояние при энергии $E_0 \gg I$ ($\nu = \Gamma$). В силу этого функция $H(z)$ имеет только простой нуль в точке $z = 1$.

Таким образом, частное решение (39) неоднородного интегрального уравнения (37) в соответствии с формулами (41) и (42) принимает вид

$$\Psi(x) = \exp[\alpha(x) - i\tilde{\delta}(x)], \quad (44)$$

где

$$\alpha(x) = -\frac{1}{\pi} P \int_1^{\infty} dy \frac{\tilde{\delta}(y)}{y-x}. \quad (45)$$

Из формул (44) и (45) следует, что функция $\Psi(x)$ регулярна при $x = 1$ (имеет простой нуль в этой точке). Кроме того, она непрерывна по Гельдеру с тем же индексом, что и фазовый сдвиг, и ограничена при $x \rightarrow +\infty$. Следовательно, априорные предположения о свойствах функции $\Psi(x)$, ко-

торые были сделаны, чтобы решить интегральное уравнение (37), являются правильными.

Для того чтобы найти общее решение уравнения (37), рассмотрим однородное уравнение

$$\Psi_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_1^{\infty} dy \frac{\Psi_0(y) h^*(y)}{y-x-i0}$$

и введем функцию

$$H_0(z) = \frac{1}{\pi} \int_1^{\infty} dy \frac{\Psi_0(y) h^*(y)}{y-z}.$$

Далее поступая также, как и в случае нахождения частного решения уравнения (37), приходим к уравнению (40) для функции $H_0(z)$, удовлетворяющей условию

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} H_0(z) = 0$$

во всех направлениях. Решение уравнения (40) для функции $H_0(z)$ будем искать в виде

$$H_0(z) = \sum_{k=1}^{\infty} A_{k-1} \exp[\omega(z)] (z-1)^{-k}, \quad (46)$$

где A_{k-1} - произвольные константы.

Непосредственная подстановка выражения (46) в уравнение (40) и требование конечности функции $H_0(z)$ при $z = 1$ дает

$$\Psi_0(x) = H_0(x_+) = A_0 \exp[\omega(x_+)] (x-1)^{-1}.$$

Поэтому общее решение интегрального уравнения (37) имеет

$$\text{вид } \Psi(x) = \left(1 + \frac{A_0}{x-1}\right) \exp[\alpha(x) - i\tilde{\delta}(x)].$$

Теперь, возвращаясь к прежним обозначениям, получаем

$$A(x) = -\frac{2}{\pi} \operatorname{sh} \chi \sin \delta(x) \exp[\alpha(\operatorname{ch} \chi)] \left(1 + \frac{A_0}{\operatorname{ch} \chi - 1}\right), \quad (47)$$

$$\alpha(\operatorname{ch} \chi) = -\frac{1}{\pi} P \int_0^{\infty} d\rho \frac{\operatorname{sh} \rho \delta(\rho)}{\operatorname{ch} \rho - \operatorname{ch} \chi}. \quad (48)$$

Здесь

$$A_0 = 1 - \operatorname{ch} \chi_0,$$

поскольку при $\varepsilon = +1$ функция $A(\chi)$ должна быть неотрицательной для всех χ , в то время как фазовый сдвиг меняет знак при энергии связанного состояния $E_0 = \operatorname{ch} \chi_0$. Отсюда видно, что решение полностью определяется фазовым сдвигом, т.к. χ_0 также задается его поведением. Более того, из выражений (47) и (48) вытекает, что функция $A(\chi)$ непрерывна по Гельдеру и при $\chi \rightarrow +\infty$ убывает как $(\operatorname{sh} \chi)^{-2}$, $\eta > 0$, если

только этими свойствами обладает фазовый сдвиг. А это означает, что квазипотенциал $V(\chi)$ удовлетворяет условию (9).

Теперь становится ясно, как от случая одного связанного состояния ($\delta(0) = \pi$, $\delta(\chi_0) = 0$) при энергии $E_0 = \text{ch} \chi_0$ перейти к случаю ν связанных состояний ($\delta(0) = \pi \nu$, $\delta(\chi_n) = \pi n$) при энергиях $E_n = \text{ch} \chi_n \geq I$, $n = 0, 1, \dots$, $\nu - I$. Аналогичные рассуждения приводят к выражению

$$A(\chi) = -\frac{2}{\pi} \text{sh} \chi \sin \delta(\chi) \exp[\alpha(\text{ch} \chi)] \prod_{n=0}^{\nu-1} \left(1 - \frac{\text{ch} \chi_n - 1}{\text{ch} \chi - 1}\right). \quad (49)$$

Точно так же рассматривается случай, когда $\varepsilon = -I$ и имеются два связанных состояния: одно с энергией $E_0 = \text{ch} \chi_0 \geq I$, а другое с энергией $E_1 = \text{cos} \varkappa < I$. Тогда $\delta(0) = 2\pi$. Поэтому функция $N(\varkappa)$ в соответствии с выражением (43) имеет нуль второго порядка при $\varkappa = I$. Теперь, действуя так же как и раньше и учитывая, что решение $A(\chi)$ должно сохранять свой знак минус при всех χ , получаем

$$A(\chi) = -\frac{2}{\pi} \text{sh} \chi \sin \delta(\chi) \exp[\alpha(\text{ch} \chi)] \left(1 - \frac{\text{ch} \chi_0 - 1}{\text{ch} \chi - 1}\right) \left(1 + \frac{1 - \text{cos} \varkappa}{\text{ch} \chi - 1}\right). \quad (50)$$

Таким образом, и в этом случае квазипотенциал однозначно определяется фазовым сдвигом и энергией связанного состояния E_1 .

Изложенный метод легко обобщается и на парциальные волны с $l > 0$. Очевидно, что уравнение (27) аналогично уравнению (17). Следовательно, результаты также будут аналогичными. Зная функцию $A_l(\chi)$, находят функцию $\tilde{V}_l(\chi)$. Затем по формуле (26г) восстанавливают квазипотенциал $V_l(r)$. Причем, если знак фазового сдвига при $\chi \rightarrow +\infty$ и знак величины ξ_l противоположны, то квазипотенциал будет действительным, в противном случае — чисто мнимым.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, в данной работе в рамках релятивистского квазипотенциального подхода к квантовой теории поля предложен метод восстановления нелокального сепарабельного квазипотенциала $V(\vec{r}, \vec{r}')$, описывающего взаимодействие двух бесспиновых частиц равных масс m , по фазовому сдвигу и энергиям связанных состояний. Полученные результаты носят релятивистски инвариантный характер.

Автор благодарит Ю.С.Вернова, И.Л.Соловцова за интерес к работе и полезное обсуждение полученных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шадан К., Сабатье П. Обратные задачи в квантовой теории рассеяния.-М.: Мир, 1980, 408 с.
2. Logunov A.A., Tavkhelidze A.N. - Nuovo Cim., 1963, v. 29, p. 380-400.
3. Kadyshevsky V.G. - Nucl. Phys., 1968, v. B6, p. 125-148.
4. Кадышевский В.Г. - ЖЭТФ, 1964, т. 46, вып. 2, с. 654-662; вып. 3, с. 872-883.
5. Kadyshevsky V.G., Mir-Kasimov R.M., Skachkov N.B. - Nuovo Cim., 1968, v. 55A, p. 233-257.
6. Кадышевский В.Г., Мир-Касимов Р.М., Скачков Н.Б. - ЭЧАЯ, 1972, т. 2, вып. 3, с. 635-690.

Юрий Дмитриевич Черниченко

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕЛОКАЛЬНЫХ СЕПАРАБЕЛЬ-
НЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

Препринт НИИЯФ МГУ-88-27/48.

Работа поступила в ОНТИ 5.04.88 г.

Редактор

К.И.Стратилатова

Подписано к печати 13.06.88г. Л-36698.

Печать офсетная. Бумага для множительных аппаратов.

Формат 60 x 84/16. Уч.-изд.л. - I, I . Усл.п.л. - I, I.

Заказ № 4091 . Тираж 100 экз.

Бесплатно

Отпечатано в лаборатории офсетной печати и
множительной техники Отдела научно-технической
информации НИИЯФ МГУ
119899, Москва ГСП