ВЕСЦІ НАЦЫЯНАЛЬНАЙ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСІ №1 2006
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

УДК 539.12

Ю. Д. ЧЕРНИЧЕНКО

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СУММЫ НЕЛОКАЛЬНЫХ СЕПАРАБЕЛЬНЫХ КВАЗИПОТЕНЦИАЛОВ

Гомельский государственный технический университет

(Поступила в редакцию 11.09.2004)

Большинство работ по обратной задаче, принципиальная возможность решения которой была доказана в работах [1–3], основаны на нерелятивистском уравнении Шредингера [4–8]. Наиболее полный обзор по теории обратной задачи можно найти в монографиях [9–10]. Тем самым задача восстановления взаимодействия для существенно релятивистских систем все еще является актуальной. Одним из таких подходов к релятивистской обратной задаче может служить релятивистский квазипотенциальный подход [11] к решению задач квантовой теории поля.

В данной работе рассматривается задача восстановления компонент нелокальной сепарабельной составляющей полного взаимодействия двух релятивистских бесспиновых частиц неравных масс ($m_1 \neq m_2$) по приращениям фазового сдвига и энергиям связанного состояния. При этом мы будем считать , что полное взаимодействие может допускать существование одного истинного связанного состояния, а его локальная часть $W(r)$ является известной и согласуется с экспериментальными данными при низких энергиях. Рассмотрение ведется в рамках релятивистского квазипотенциального подхода [12] к решению задач квантовой теории поля. В основе рассматриваемого подхода лежит выражение для приращений фазового сдвига ($\hbar = c = 1$)

$$\mathrm{tg}\delta_l^{V_{ln}}(\chi') = -\frac{\pi}{2}\mathrm{sh}^{-1}(\chi')A_{ln}(\chi')\left[1 + \frac{1}{2}\mathrm{P}\int\limits_0^\infty d\chi \frac{A_{ln}(\chi)}{\mathrm{ch}\chi - \mathrm{ch}\chi'}\right]^{-1}, \tag{1}$$

$$A_{ln}(\chi) = \frac{2}{\pi}\varepsilon_{ln}|Q_l(\mathrm{cth}\chi)\tilde{V}_{ln}^{(n-1)}(\chi)/F_l^W(\chi)|^2 \prod_{m=1}^{n-1}\left[\cos\delta_l^{V_{lm}}(\chi)\right]^2, \quad \varepsilon_{ln} = \pm 1, n = 1, 2, \ldots, M_l. \tag{2}$$

Здесь P — символ главного значения, $Q_l(z)$ — функция Лежандра второго рода, а $F_l^W(\chi)$ — функция Йоста локального квазипотенциала $W(r)$ и связана с соответствующим ей фазовым сдвигом $\delta_l^W(\chi)$ соотношением $F_l^W(\chi) = |F_l^W(\chi)|\exp[-i\delta_l^W(\chi)]$.

Для того чтобы восстановить компоненты $V_{ln}(r)$ по приращениям $\delta_l^{V_{ln}}(\chi')$ фазового сдвига и энергиям связанного состояния, мы решим интегральное уравнение (1) относительно функции $A_{ln}(\chi')$. При этом мы воспользуемся подходом, изложенным в работе [13]. После этого используя интегральное преобразование Гильберта, из (2) найдем функции $\tilde{V}_{ln}^{(n-1)}(\chi')$. Наконец, выполнив обобщенные релятивистские интегральные преобразования Ханкеля

$$V_{ln}(r) = \int\limits_1^\infty d\rho_l^{(n-1)}(\mathrm{ch}\chi)\tilde{V}_{ln}^{(n-1)}(\chi)\psi_l^{(n-1)}(r,\chi)\ , \quad n = 1, 2, \ldots, M_l, \tag{3}$$

мы восстановим компоненты $V_{ln}(r)$. Здесь $\psi_l^{(n-1)}(r,\chi)$ есть решение конечно-разностного квазипотенциального уравнения с квазипотенциалом, соответствующим суперпозиции локального $W(r)$ и $(n-1)$-компонентного нелокального сепарабельного $\sum_{m=1}^{n-1}\varepsilon_{lm}V_{lm}(r)V_{lm}(r')$ квазипотен- циалов. Этому решению отвечает спектральная плотность

$$\frac{d\rho_l^{(n-1)}(\mathrm{ch}\chi)}{d(\mathrm{ch}\chi)} = \frac{d\rho_l^{(0)}(\mathrm{ch}\chi)}{d(\mathrm{ch}\chi)}\prod_{m=1}^{n-1}\left[\cos\,\delta_l^{V_{lm}}(\chi)\right]^2, \quad n=1,2,\ldots,M_l,$$

где $d\rho_l^{(0)}/(\mathrm{ch}\chi)d(\mathrm{ch}\chi) = 2\pi^{-1}\mathrm{sh}^{-1}(\chi)|Q_l(\mathrm{cth}\chi)/F_l^W(\chi)|^2$ — спектральная плотность для регулярного решения $\varphi_l^{(0)}(r,\chi)\equiv\varphi_l(r,\chi)$ конечно-разностного квазипотенциального уравнения с локальным квазипотенциалом $W(r)$, не допускающим существования связанных состояний. При этом для решений $\psi_l^{(n-1)}(r,\chi)$ справедливы условия полноты

$$\int_1^\infty d\rho_l^{(n-1)}(\mathrm{ch}\chi)\psi_l^{(n-1)}(r,\chi)\psi_l^{*(n-1)}(r',\chi) = \delta(r'-r), \quad n=1,2,\ldots,M_l. \tag{4}$$

Заметим, что интегральные преобразования (3), как и условия (4), при $n=1$ совпадают с соответствующими соотношениями, полученными в работе [14].

Для единственности решения обратной задачи потребуем, чтобы приращения $\delta_l^{V_{ln}}(\chi')$ фазового сдвига в выражении (1) были непрерывными по Гельдеру функциями с некоторым положительным индексом и при $\chi'\to+\infty$ для них имели место оценки

$$\delta_l^{V_{ln}}(\chi') = O(\chi'^{-\gamma}), \quad l\geqslant 0, \quad \gamma>1, \quad n=1,2,\ldots,M_l. \tag{5}$$

Эти требования означают, что компоненты $V_{ln}(r)$ сепарабельного взаимодействия удовлетворяют условиям

$$rV_{ln}(r)\in L_1(0,\infty), \quad n=1,2,\ldots,M_l. \tag{6}$$

Кроме того, для приращений фазового сдвига выполняется теорема Левинсона

$$\delta_l^{V_{ln}}(0)-\delta_l^{V_{ln}}(\infty) = \delta_l^{V_{ln}}(0) = \pi(\sigma_l^{(n)}-\sigma_l^{(n-1)}+\nu_l^{(n)}), \quad n=1,2,\ldots,M_l, \tag{7}$$

причем $\delta_l^W(0)-\delta_l^W(\infty)=\delta_l^W(0)=0$. Здесь $\nu_l^{(n)}$ — число "поддельных" связанных состояний, обусловленных n-ой компонентой нелокального сепарабельного квазипотенциала в каждой парциальной волне, с энергиями

$$E_{fk}^{(n)} = \mathrm{ch}\chi_{fk}^{(n)}\geqslant 1, \quad n=1,2,\ldots,M_l, \quad k=\begin{cases}0,1,\ldots,\nu_l^{(n)}-1, & \varepsilon_{ln}=1,\\ 1,2,\ldots,\nu_l^{(n)}, & \varepsilon_{ln}=-1,\end{cases} \tag{8}$$

а $\sigma_l^{(n)}$ — число истинных связанных состояний, обусловленных суперпозицией локального $W(r)$ и n-компонентного нелокального сепарабельного квазипотенциалов, с энергиями

$$0\leqslant E_t^{(n)} = \mathrm{ch}\chi_t^{(n)}<1, \quad \chi_t^{(n)}=i\kappa_t^{(n)}, \quad 0<\kappa_t^{(n)}\leqslant\pi/2, \quad n=1,2,\ldots,M_l, \tag{9}$$

причем в нашем случае

$$\sigma_l^{(n)} = \begin{cases}0, & \varepsilon_{ln}=1,\ n=1,2,\ldots,M_l,\\ 0, & \varepsilon_{ln}=-1,\ n=1,2,\ldots,M_l-1,\\ 1, & \varepsilon_{lM_l}=-1,\ n=M_l.\end{cases} \tag{10}$$

При этом значения энергий (8) "поддельных" связанных состояний находятся по тем значениям χ', при которых приращения фазового сдвига пересекают прямые $\delta_l^{V_{ln}} = \pi k$ (k– целое) сверху при возрастании χ', т.е.

$$\delta_l^{V_{ln}}(\chi_{fk}^{(n)}) = \pi k, \quad n = 1, 2, \ldots, M_l, \quad k = \begin{cases} 1, 2, \ldots, \nu_l^{(n)}, & \varepsilon_{ln} = -1, \\ 0, 1, \ldots, \nu_l^{(n)} - 1, & \varepsilon_{ln} = 1. \end{cases} \tag{11}$$

В то же время значение энергии (9) единственного истинного связанного состояния полного взаимодействия ($n = M_l$) является простым корнем уравнения

$$\Phi_{lM_l}(E_l^{(M_l)}) = -1 + \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty d\chi \frac{|A_{lM_l}(\chi)|}{\operatorname{ch}\chi - E_l^{(M_l)}} = 0.$$

Для того чтобы решить интегральное уравнение (1), выполним замену переменных $x = \operatorname{ch}\chi'$, $t = \operatorname{ch}\chi$ и введем следующие обозначения:

$$\Delta_l^{V_{ln}}(x) = \delta_l^{V_{ln}}(\operatorname{arch} x), \quad g_{ln}(x) = -\frac{2}{\pi}(x^2-1)^{1/2}\operatorname{tg}\Delta_l^{V_{ln}}(x), \quad h_{ln}(x) = -\sin\Delta_l^{V_{ln}}(x)\exp[-i\Delta_l^{V_{ln}}(x)],$$

$$\psi_{ln}(x) = A_{ln}(\operatorname{arch} x) g_{ln}^{-1}(x)\left[1 + \frac{i\pi}{2} g_{ln}(x)(x^2-1)^{-1/2}\right]. \tag{12}$$

Тогда уравнение (1) преобразуется к виду

$$\psi_{ln}(x) = 1 + \frac{1}{\pi}\int\limits_1^\infty dt \frac{\psi_{ln}(t) h_{ln}^*(t)}{t - x - i0}, \quad n = 1, 2, \ldots, M_l. \tag{13}$$

Решение уравнения (13), как и в случае однокомпонентного сепарабельного квазипотенциала [13], представим в виде

$$\psi_{ln}(x) = H_{ln}(x_+) \equiv \lim_{\eta \to +0} H_{ln}(x + i\eta), \quad 1 \leqslant x \leqslant \infty, \tag{14}$$

где функция

$$H_{ln}(z) = 1 + \frac{1}{\pi}\int\limits_1^\infty dt \frac{\psi_{ln}(t) h_{ln}^*(t)}{t - z} \tag{15}$$

является аналитической в комплексной плоскости переменной z с разрезом от 1 до $+\infty$, причем

$$\lim_{|z| \to \infty} H_{ln}(z) = 1 \tag{16}$$

во всех направлениях, если только функция $\psi_{ln}(x)$ непрерывна по Гельдеру, а интеграл в (15) сходится. Более того, подстановка решения (14) в выражение для скачка функции $H_{ln}(z)$ на разрезе

$$H_{ln}(x_+) - H_{ln}(x_-) = -2i\sin\Delta_l^{V_{ln}}(x)\exp\left[i\Delta_l^{V_{ln}}(x)\right]\psi_{ln}(x)$$

приводит к однородному уравнению Римана — Гильберта

$$H_{ln}(x_+)\exp\left[2i\Delta_l^{V_{ln}}(x)\right] - H_{ln}(x_-) = 0, \quad 1 \leqslant x \leqslant \infty. \tag{17}$$

Частное решение этого уравнения, удовлетворяющее условию (16), дается выражением

$$\tilde{H}_{ln}(z) = \exp\left[\omega_{ln}(z)\right], \tag{18}$$

где

$$\omega_{ln}(z) = -\frac{1}{\pi}\int_1^\infty dt\frac{\Delta_l^{V_{ln}}(t)}{t-z}, \tag{19}$$

причем из предположений о поведении приращений фазового сдвига и условий (5) следует, что во всех направлениях $\lim\limits_{|z|\to\infty}\omega_{ln}(z) = 0$. Более того, функция (19) определена на разрезе всюду, кроме точки $z = 1$, где ее поведение имеет вид

$$\omega_{ln}(z) = \frac{1}{\pi}\Delta_l^{V_{ln}}(1)\ln|1-z| + \Omega_{ln}(z), \quad z\to 1. \tag{20}$$

Здесь функция $\Omega_{ln}(z)$ конечна при $z = 1$, а $\Delta_l^{V_{ln}}(1) = \delta_l^{V_{ln}}(0) = \pi(\sigma_l^{(n)} - \sigma_l^{(n-1)} + \nu_l^{(n)})$ согласно теореме Левинсона (7). Следовательно, функция $\tilde H_{ln}(z)$ имеет нуль порядка $(\sigma_l^{(n)} - \sigma_l^{(n-1)} + \nu_l^{(n)})$ в точке $z = 1$. Тем самым частное решение неоднородного интегрального уравнения (13) существует и в соответствии с выражениями (14) , (18) и (19) имеет вид

$$\tilde\psi_{ln}(x) = \exp\left[\alpha_{ln}(x) - i\Delta_l^{V_{ln}}(x)\right], \tag{21}$$

где

$$\alpha_{ln}(x) = -\frac{1}{\pi}\mathrm{P}\int_1^\infty dt\frac{\Delta_l^{V_{ln}}(t)}{t-x}, \tag{22}$$

причем

$$\omega_{ln}(x_\pm) = \alpha_{ln}(x) \mp i\Delta_l^{V_{ln}}(x). \tag{23}$$

Отметим, что функция (21) регулярна при $x = 1$ (имеет нуль порядка $(\sigma_l^{(n)} - \sigma_l^{(n-1)} + \nu_l^{(n)})$ в этой точке), непрерывна по Гельдеру с тем же индексом, что и приращения фазового сдвига, и ограничена при $x \to +\infty$, а это совпадает с априорными предположениями о ее свойствах. Более того, она удовлетворяет уравнению (13), поскольку по теореме о вычетах мы можем записать:

$$\lim_{\substack{R\to+\infty\\ \eta\to+0}}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^+} dz\frac{\tilde H_{ln}(z)}{z-x-i\eta} = \mathrm{res}\left[\frac{\tilde H_{ln}(z)}{z-x-i\eta}, \quad z = x+i\eta\right]\Bigg|_{\eta\to+0},$$

где Γ^+ — замкнутый контур, состоящий из окружностей C_R^+ радиуса R с центром в точке $z = 0$, C_η^- радиуса η с центром в точке $z = 1$ и двух берегов разреза от 1 до R , проходимых в противоположных направлениях. При этом вклад интеграла по окружности C_R^+, согласно асимптотике (16), стремится к 1 при $R \to +\infty$, а его вклад по окружности C_η^- в силу оценки (20) стремится к нулю при $\eta \to +0$. Отсюда, учитывая выражение (23), мы и заключаем, что функция (21) является частным решением неоднородного интегрального уравнения (13).

Теперь найдем общее решение однородного уравнения

$$\psi_{lno}(x) = \frac{1}{\pi}\int_1^\infty dt\frac{\psi_{lno}(t)h_{ln}^*(t)}{t-x-i0}, \tag{24}$$

которое представим в виде $\psi_{lno}(x) = H_{lno}(x_+) \equiv \lim\limits_{\eta\to+0} H_{lno}(x+i\eta)$, $1 \leqslant x \leqslant \infty$. Здесь функция $H_{lno}(z) = \pi^{-1}\int_1^\infty dt\psi_{lno}(t)h_{ln}^*(t)/t-z$ является аналитической в комплексной плоскости переменной z с разрезом от 1 до $+\infty$, причем во всех направлениях $\lim\limits_{|z|\to\infty} H_{lno}(z) = 0$, и она также удовлетворяет однородному уравнению Римана — Гильберта (17). Поэтому общее решение уравнения (17) будем искать в виде $H_{lno}(z) = \exp[\omega_{ln}(z)] \sum_{k=1}^{N_l^{(n)}} A_k^{(n)} (z-1)^{-k}$, подстановка которого в уравнение (17) и требование его конечности при $z = 1$ (функция $H_{lno}(z)$ имеет нуль порядка $(\sigma_l^{(n)} - \sigma_l^{(n-1)} + \nu_l^{(n)})$ в точке $z = 1$) дает $N_l^{(n)} = \sigma_l^{(n)} - \sigma_l^{(n-1)} + \nu_l^{(n)}$. Следовательно,

$$\psi_{lno}(x) = \exp\left[\alpha_{ln}(x) - i\Delta_l^{V_{ln}}(x)\right] \sum_{k=1}^{N_l^{(n)}} \frac{A_k^{(n)}}{(x-1)^k}, \quad N_l^{(n)} = \sigma_l^{(n)} - \sigma_l^{(n-1)} + \nu_l^{(n)}. \tag{25}$$

При этом, как и в случае частного решения, интегрированием по контуру Γ^+ убеждаемся, что функция (25) является решением уравнения (24) и обладает всеми требуемыми свойствами.

Таким образом, общее решение интегрального уравнения (13), в соответствии с соотношениями (21) и (25), дается выражением

$$\psi_{ln}(x) = \tilde{\psi}_{ln}(x) + \psi_{lno}(x) = \exp\left[\alpha_{ln}(x) - i\Delta_l^{V_{ln}}(x)\right] \left\{1 + \sum_{k=1}^{N_l^{(n)}} \frac{A_k^{(n)}}{(x-1)^k}\right\}. \tag{26}$$

Наконец, принимая во внимание обозначения (12) и преобразуя сумму в произведение, решение (26) запишем в виде

$$A_{ln}(\chi') = -\frac{2}{\pi} \mathrm{sh}\chi' \sin\delta_l^{V_{ln}}(\chi') \exp\left[\alpha_{ln}(\mathrm{ch}\chi')\right] \prod_{k=1-\delta}^{N_l^{(n)}-\delta} \left[1 + \frac{a_k^{(n)}}{\mathrm{ch}\chi' - 1}\right], \tag{27}$$

где

$$\alpha_{ln}(\mathrm{ch}\chi') = -\frac{1}{\pi} \mathrm{P} \int_0^\infty d\chi \frac{\mathrm{sh}\chi \delta_l^{V_{ln}}(\chi)}{\mathrm{ch}\chi - \mathrm{ch}\chi'}, \tag{28}$$

$$N_l^{(n)} = \sigma_l^{(n)} - \sigma_l^{(n-1)} + \nu_l^{(n)} = \begin{cases} \nu_l^{(n)}, & \varepsilon_{ln} = 1,\ n = 1, 2, \ldots, M_l, \\ \nu_l^{(n)}, & \varepsilon_{ln} = -1,\ n = 1, 2, \ldots, M_l - 1, \\ \nu_l^{(M_l)} + 1, & \varepsilon_{lM_l} = -1,\ n = M_l, \end{cases} \quad \delta = \begin{cases} 1, & \varepsilon_{ln} = 1, \\ 0, & \varepsilon_{ln} = -1. \end{cases} \tag{29}$$

Для нахождения параметров $\{a_k^{(n)}\}$ заметим, что функция $A_{ln}(\chi')$ по определению (2) должна сохранять свой знак при всех значениях χ'. В то же время приращения фазового сдвига при значениях энергий (8) "поддельных" связанных состояний удовлетворяют условиям (11). Следовательно, при переходе через точки $\chi_{fk}^{(n)}$ правая часть выражения (27) с учетом выражений (9) и (10) сохранит свой знак, если

$$a_k^{(n)} = 1 - \mathrm{ch}\chi_{fk}^{(n)}, \quad k = \begin{cases} 0, 1, \ldots, \nu_l^{(n)} - 1, & \varepsilon_{ln} = 1,\ n = 1, 2, \ldots, M_l, \\ 1, 2, \ldots, \nu_l^{(n)}, & \varepsilon_{ln} = -1,\ n = 1, 2, \ldots, M_l, \end{cases}$$

$$a^{(M_l)}_{\nu_l^{(M_l)}+1} = 1 - \mathrm{ch}\chi_l^{(M_l)}, \quad \sigma_l^{(M_l)} = 1, \quad \varepsilon_{lM_l} = -1, \quad n = M_l.$$

Тогда вместо выражения (27) получим

$$A_{ln}(\chi') = -\frac{2}{\pi} \mathrm{sh}\chi' \sin\delta_l^{V_{ln}}(\chi') \exp\left[\alpha_{ln}(\mathrm{ch}\chi')\right] \prod_{k=1-\delta}^{\nu_l^{(n)}-\delta} \left[\frac{\mathrm{sh}^2(\chi'/2) - \mathrm{sh}^2(\chi_{fk}^{(n)}/2)}{\mathrm{sh}^2(\chi'/2)}\right] \times$$

$$\left[\frac{\operatorname{sh}^2(\chi'/2)+\sin^2(\kappa_l^{(n)}/2)}{\operatorname{sh}^2(\chi'/2)}\right]^{\sigma_l^{(n)}}, \quad n=1,2,\ldots,M_l, \tag{30}$$

где $\kappa_l^{(n)}$ и $\sigma_l^{(n)}$определены в (9) и (10), а δ–в (29).

Таким образом, решения (30) однозначно определяются энергией (9) истинного связанного состояния полного квазипотенциала ($n = M_l$) и приращениями фазового сдвига, так как значения $\chi_{fk}^{(n)}$ также задаются их поведением — условиями (11). Кроме того, из (28) и (30) следует, что функции $A_{ln}(\chi')$ непрерывны по Гельдеру и при $|\chi'| \to \infty$ они имеют асимптотику $\operatorname{ch}\chi' \, |\chi'|^{-\gamma}, \gamma > 1$, $n = 1, 2, \ldots, M_l$, если только приращения фазового сдвига удовлетворяют условиям (5), а, следовательно, компоненты $V_{ln}(r)$ удовлетворяют условиям (6).

Чтобы восстановить компоненты $V_{ln}(r)$ посредством преобразований (3), введем функции

$$\hat{V}_{ln}(\operatorname{sh}(\chi'/2))=\left[\frac{\operatorname{sh}(\chi'/2)+i\sin(\kappa_l^{(n)}/2)}{\operatorname{sh}(\chi'/2)-i\sin(\kappa_l^{(n)}/2)}\right]^{\sigma_l^{(n)}}\left[Q_l(\operatorname{cth}\chi')\prod_{m=1}^{n-1}\cos[\delta_l^{V_{lm}}(\chi')]\tilde{V}_{ln}^{(-)}(\operatorname{sh}(\chi'/2))/\left|F_l^W(\chi')\right|\right]^2, \tag{31}$$

$$|\tilde{V}_{ln}^{(-)}(\operatorname{sh}(\chi'/2))| = |\tilde{V}_{ln}^{(n-1)}(\chi')|, \quad \operatorname{Re}\tilde{V}_{ln}^{(-)}(\operatorname{sh}(\chi'/2)) = \operatorname{Re}\tilde{V}_{ln}^{(n-1)}(\chi'),$$
$$\arg\tilde{V}_{ln}^{(-)}(-\operatorname{sh}(\chi'/2)) = -\arg\tilde{V}_{ln}^{(-)}(\operatorname{sh}(\chi'/2)), \quad n=1,2,\ldots,M_l. \tag{32}$$

Поскольку $\arg\tilde{V}_{ln}^{(n-1)}(-\chi') = \arg\tilde{V}_{ln}^{(n-1)}(\chi')$, то в силу условий (32) это означает, что

$$\arg\tilde{V}_{ln}^{(n-1)}(\chi') = \operatorname{sgn}\chi'\arg\tilde{V}_{ln}^{(-)}(\operatorname{sh}(\chi'/2)). \tag{33}$$

Тем самым функции $\hat{V}_{ln}(\operatorname{sh}(\chi'/2))$ являются аналитическими в полосе $0 < \operatorname{Im}\chi' \leqslant \pi/2$, непрерывны при $0 \leqslant \operatorname{Im}\chi' \leqslant \pi/2$ и для них справедлива оценка

$$\hat{V}_{ln}(\operatorname{sh}(\chi'/2)) = O\left[\operatorname{sh}^2(\chi'/2)\right], \quad |\chi'| \to \infty, \quad 0 \leqslant \operatorname{Im}\chi' \leqslant \pi/2, \tag{34}$$

если только условия (5) выполняются. Более того, функции $\hat{V}_{ln}(\operatorname{sh}(\chi'/2))$ нигде не обращаются в нуль в полосе $0 < \operatorname{Im}\chi' \leqslant \pi/2$. Следовательно, функции $\ln\hat{V}_{ln}(\operatorname{sh}(\chi'/2))$ являются аналитическими в полосе $0 < \operatorname{Im}\chi' \leqslant \pi/2$ и ведут себя как $\ln(\operatorname{sh}^2(\chi'/2))$ при $|\chi'| \to \infty$ в силу оценки (34). Поэтому мы имеем право применить интегральное преобразование Гильберта к действительной и мнимой частям функций $\ln\hat{V}_{ln}(\operatorname{sh}(\chi'/2))$. Тогда для действительных χ' будем иметь

$$\operatorname{Im}\ln\hat{V}_{ln}(\operatorname{sh}(\chi'/2)) = -\frac{1}{\pi}\mathrm{P}\int_{-\infty}^{\infty} d(\operatorname{sh}(\chi/2))\frac{\operatorname{Re}\ln\hat{V}_{ln}(\operatorname{sh}(\chi/2))}{\operatorname{sh}(\chi/2)-\operatorname{sh}(\chi'/2)} =$$

$$-\frac{2\operatorname{sh}(\chi'/2)}{\pi}\mathrm{P}\int_0^{\infty} d\chi\frac{\operatorname{ch}(\chi/2)\ln\left[\pi\varepsilon_{ln}A_{ln}(\chi)/2\right]}{\operatorname{ch}\chi-\operatorname{ch}\chi'},$$

где мы учли, что $\operatorname{Re}\ln\hat{V}_{ln}(\operatorname{sh}(\chi/2)) = \ln\left[\pi\varepsilon_{ln}A_{ln}(\chi)/2\right]$. Отсюда, принимая во внимание выражение (31), находим

$$\left[Q_l(\operatorname{cth}\chi')\prod_{m=1}^{n-1}\cos[\delta_l^{V_{lm}}(\chi')]\tilde{V}_{ln}^{(-)}(\operatorname{sh}(\chi'/2))/|F_l^W(\chi')|\right]^2 = \frac{\pi}{2}\varepsilon_{ln}A_{ln}(\chi')\left[\frac{\operatorname{sh}(\chi'/2)-i\sin(\kappa_l^{(n)}/2)}{\operatorname{sh}(\chi'/2)+i\sin(\kappa_l^{(n)}/2)}\right]^{\sigma_l^{(n)}}\times$$

$$\exp\left[\frac{2\operatorname{sh}(\chi'/2)}{i\pi}\mathrm{P}\int_0^{\infty}d\chi\frac{\operatorname{ch}(\chi/2)\ln[\pi\varepsilon_{ln}A_{ln}(\chi)/2]}{\operatorname{ch}\chi-\operatorname{ch}\chi'}\right], \quad n=1,2,\ldots,M_l.$$

Наконец, учитывая соотношения (32) и (33), окончательно получим

$$|Q_l(\mathrm{cth}\chi')/F_l^W(\chi')| \prod_{m=1}^{n-1} \cos\left[\delta_l^{V_{lm}}(\chi')\right] \; \tilde{V}_{ln}^{(n-1)}(\chi') = \sqrt{\pi\varepsilon_{ln}A_{ln}(\chi')/2}\times$$

$$\exp\left\{-i\mathrm{sgn}\,\chi'\left[\sigma_l^{(n)}\mathrm{arctg}\frac{\sin(\kappa_l^{(n)}/2)}{\mathrm{sh}(\chi'/2)} + \frac{\mathrm{sh}(\chi'/2)}{\pi}\mathrm{P}\int_0^\infty d\chi\frac{\mathrm{ch}(\chi/2)\ln\left[\pi\varepsilon_{ln}A_{ln}(\chi)/2\right]}{\mathrm{ch}\chi-\mathrm{ch}\chi'}\right]\right\},$$

где $n = 1, 2, \ldots, M_l$.

Таким образом, решение релятивистской обратной задачи существует и однозначно определяется приращениями фазового сдвига и энергией истинного связанного состояния полного взаимодействия.

В заключение подчеркнем, что предложенный здесь метод восстановления компонент нелокальной сепарабельной составляющей полного взаимодействия двух релятивистских бесспиновых частиц неравных масс фактически эквивалентен одночастичной обратной задаче. Последнее связано с тем, что в рамках релятивистского квазипотенциального подхода к квантовой теории поля полная энергия двух релятивистских бесспиновых частиц неравных масс в с. ц. и. пропорциональна энергии одной эффективной релятивистской частицы массы m' [15].

Автор выражает благодарность В. В. Андрееву, А. М. Широкову и Ю. С. Вернову за интерес к работе, ценные замечания и полезные обсуждения полученных результатов.

Литература

1. Гельфанд И. М., Левитан Б. М. // Докл. АН СССР. 1951. Т. 77. С. 557 – 560; Изв. АН СССР. Сер. мат. 1951. Т. 15. С. 309 – 360.
2. Марченко В. А. // Докл. АН СССР. 1955. Т. 104. С. 695 – 698.
3. Крейн М. Г. // Докл. АН СССР. 1951. Т. 76. С. 21 – 24; С. 345 – 348.
4. Gourdin M., Martin A. // Nuovo Cimento. 1957. Vol. 6. P. 757 – 773; 1958. Vol. 8. P. 699 – 715.
5. Chadan K. // Nuovo Cimento. 1958. Vol. 10. P. 892 – 908; 1967. Vol. 157 A. P. 510 – 525.
6. Bolsterli M., McKenzie J. // Physics. 1965. Vol. 2. P. 141 – 149.
7. Tabakin F. // Phys. Rev. 1969. Vol. 177. P. 1443 – 1451.
8. Mills R. L., Reading J. F. // J. Math. Phys. 1969. Vol. 10. P. 321 – 331 .
9. Шадан К., Сабатье П. Обратные задачи в квантовой теории рассеяния. М., 1980.
10. Захарьев Б. Н., Сузько А. А. Потенциалы и квантовое рассеяние: Прямая и обратная задачи. М., 1985.
11. Logunov A. A., Tavkhelidze A. N. // Nuovo Cimento. 1963. Vol. 29. P. 380 – 400.
12. Kadyshevsky V. G. // Nucl. Phys. 1968. Vol. 6 B. P. 125 – 148.
13. Черниченко Ю. Д. // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2004. № 1. С. 84 – 89.
14. Черниченко Ю. Д. // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2004. № 2. С. 72 – 80.
15. Кадышевский В. Г., Матеев М. Д., Мир-Касимов Р. М. // ЯФ. 1970. Т. 11. С. 692 – 700.

Yu. D. CHERNICHENKO

RELATIVISTIC INVERSE PROBLEM FOR A SUM OF NONLOCAL SEPARABLE QUASIPOTENTIALS

Summary

A relativistic inverse problem is solved for the case when the total quasipotential simulating the interaction of two relativistic spinless particles of unequal masses is the superposition of a local quasipotential and a sum of nonlocal separable quasipotentials. The problem is investigated within the relativistic quasipotential approach to quantum field theory. The local component of total interaction is supposed to be known and it not admits bound states. It is shown that the nonlocal separable components of total interaction may be reconstructed if its the local component, the additionals phase shift and the true bound state energy are known.