

УДК 539.12

Ю. Д. ЧЕРНИЧЕНКО

РЕШЕНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКОГО КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ СУММЫ НЕЛОКАЛЬНЫХ СЕПАРАБЕЛЬНЫХ КВАЗИПОТЕНЦИАЛОВ

Гомельский государственный технический университет

(Поступила в редакцию 11.09.2004)

1. Введение. Достоинство нелокальных сепарабельных двухчастичных взаимодействий вызвано не только широким применением их в ядерной физике и в проблеме многих тел, например, при решении уравнений Фаддеева в задаче трех тел. Они также успешно используются и при решении нерелятивистской обратной задачи [1–5]. Тем не менее такой подход не применим для существенно релятивистских систем [6, 7]. Для таких систем, в частности, образованных легкими кварками, вклад релятивистских поправок к гамильтониану взаимодействия сравним с основным нерелятивистским членом.

Одним из эффективных методов релятивистского описания двухчастичных систем [8–11] до сих пор остается квазипотенциальный подход [12]. В данной работе в рамках релятивистского квазипотенциального подхода к решению задач квантовой теории поля [13] исследуется решение конечно-разностного квазипотенциального уравнения для суперпозиции локального и многокомпонентного нелокального сепарабельного квазипотенциалов, описывающих взаимодействие двух релятивистских бесспиновых частиц неравных масс ($m_1 \neq m_2$). При этом мы будем считать, что полное взаимодействие допускает существование одного истинного связанного состояния, а его локальная часть $w(\rho)$ является известной и согласуется с экспериментальными данными при низких энергиях. Поэтому, ограничиваясь случаем центрально-симметричных сил, выберем полное взаимодействие в виде

$$V(\rho, \rho'; E_{q'}) \equiv V(\rho, \rho') = w(\rho) \delta(\rho' - \rho) + \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{M_l} (2l+1) \varepsilon_{lm} v_{lm}(\rho) v_{lm}(\rho') P_l\left(\frac{\rho \cdot \rho'}{\rho \rho'}\right). \quad (1)$$

Здесь $\varepsilon_{lm} = -1$ отвечает притягивающему взаимодействию, а $\varepsilon_{lm} = 1$ — отталкивающему взаимодействию; $P_l(z)$ — функция Лежандра первого рода; $\rho = |\rho|$, $\rho' = |\rho'|$. Тогда в случае неравных масс релятивистский аналог дифференциального уравнения Шредингера для волновой функции $\Psi_{q'}(\rho)$ в конфигурационном представлении с взаимодействием (1) можно представить в форме [14] ($\hbar = c = 1$)

$$\frac{m'^2}{\mu} \left[\text{ch} \left(i\lambda' \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{i\lambda'}{\rho} \text{sh} \left(i\lambda' \frac{\partial}{\partial \rho} \right) - \frac{\lambda'^2}{2\rho^2} \Delta_{\theta, \varphi} \exp \left(i\lambda' \frac{\partial}{\partial \rho} \right) - \text{ch} \lambda' \right] \Psi_{q'}(\rho) + \int d\rho' V(\rho, \rho') \Psi_{q'}(\rho') = 0, \quad (2)$$

где $\Delta_{\theta, \varphi}$ — угловая часть оператора Лапласа; λ' — комптоновская длина волны эффективной релятивистской частицы массы $m' = \sqrt{m_1 m_2}$, а $\mu = m'^2 / (m_1 + m_2)$. При этом уравнение (2)

описывает рассеяние эффективной релятивистской частицы массы m' с трехмерным относительным импульсом \mathbf{q}' и полной энергией взаимодействующих частиц $\sqrt{S_{q'}}$, пропорциональной в с.ц.и. энергии $E_{q'}$ одной эффективной релятивистской частицы массы m' [14], т. е. $\sqrt{S_{q'}} = (m'/\mu) E_{q'}$, $E_{q'} = \sqrt{m'^2 + \mathbf{q}'^2} = m' \operatorname{ch} \chi'$.

Волновую функцию $\Psi_{q'}(\rho)$ разложим по парциальным волнам [15]:

$$\Psi_{q'}(\rho) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l \frac{\psi_l(\rho, \chi')}{\rho} P_l\left(\frac{\mathbf{q}' \cdot \rho}{q' \rho}\right), \quad q' = |\mathbf{q}'|.$$

Тогда уравнение (2) преобразуется к виду

$$\left[\nabla + \left(1 + \frac{l(l+1)}{r^2}\right) \nabla^* - 2 \operatorname{ch} \chi' + W(r) \right] \psi_l(r, \chi') + \sum_{m=1}^{M_l} \varepsilon_{lm} V_{lm}(r) \int_0^{\infty} dr' V_{lm}(r') \psi_l(r', \chi') = 0, \quad (3)$$

где $\nabla = \exp(-id/dr)$, $\nabla^* = \exp(id/dr)$, $V_{lm}(r) = \sqrt{8\pi \lambda' \mu / m'^2} \rho v_{lm}(\rho)$, $W(r) = 2\mu w(\rho) / m'^2$, $\rho = \lambda' r$, $\rho' = \lambda' r'$.

Таким образом, в рамках рассматриваемого релятивистского квазипотенциального подхода к квантовой теории поля релятивистская проблема двух тел неравных масс сводится к одночастичной. Это обусловлено тем, что в рамках данного подхода полную энергию двух релятивистских бесспиновых частиц неравных масс в с.ц.и. можно представить пропорциональной энергии одной эффективной релятивистской частицы массы m' .

Целью настоящей работы является решение уравнения (3) с граничным условием

$$\psi_l(0, \chi') = 0, \quad (4)$$

получение выражения для приращений фазового сдвига, исследование условий существования связанных состояний и обобщение теоремы Левинсона для суперпозиции локального и многокомпонентного нелокального сепарабельного квазипотенциалов. При этом мы будем рассматривать здесь тот случай, когда полное взаимодействие допускает существование только одного истинного связанного состояния.

2. Волновая функция и приращения фазового сдвига. Для того чтобы уравнение (3) с граничным условием (4) имело единственное решение, необходимо, чтобы локальный квазипотенциал $W(r)$ и компоненты $V_{lm}(r)$ сепарабельного квазипотенциала удовлетворяли условиям

$$rW(r) \in L_1(0, \infty), \quad rV_{lm}(r) \in L_1(0, \infty), \quad m = 1, 2, \dots, M_l. \quad (5)$$

Это означает, что регулярное решение $\varphi_l(r, \chi')$ уравнения (3) при $\varepsilon_{lm} \equiv 0$ с граничным условием $\varphi_l(0, \chi') = 0$, когда локальный квазипотенциал $W(r)$ не допускает связанных состояний, удовлетворяет условиям ортогональности и полноты [16]:

$$\int_0^{\infty} dr \varphi_l(r, \chi) \varphi_l^*(r, \chi') = \frac{\delta(\operatorname{ch} \chi - \operatorname{ch} \chi')}{d\rho_l(\operatorname{ch} \chi) / d(\operatorname{ch} \chi)}, \quad (6)$$

$$\int_1^{\infty} d\rho_l(\operatorname{ch} \chi) \varphi_l(r, \chi) \varphi_l^*(r', \chi) = \delta(r' - r) \quad (7)$$

со спектральной плотностью

$$\frac{d\rho_l(\operatorname{ch} \chi)}{d(\operatorname{ch} \chi)} = \operatorname{sh}^{-1}(\chi) \pi(\chi), \quad \pi(\chi) = \frac{2}{\pi} Q_l^2(\operatorname{cth} \chi) |F_l^W(\chi)|^{-2}, \quad E = E_q / m' = \operatorname{ch} \chi \geq 1. \quad (8)$$

Здесь $Q_l(z)$ — функция Лежандра второго рода, а $F_l^W(\chi)$ есть функция Йоста для локального квазипотенциала $W(r)$ и она связана с соответствующим ей фазовым сдвигом $\delta_l^W(\chi)$ соотношением $F_l^W(\chi) = |F_l^W(\chi)| \exp[-i\delta_l^W(\chi)]$.

Решение уравнения (3) с граничным условием (4) будем искать путем итераций, используя интегральные преобразования волновой функции, полученной в предыдущей итерации.

На первом шаге итерации ($n = 1$) мы рассматриваем суперпозицию $W(r)$ и $\varepsilon_{11} V_{11}(r) V_{11}(r')$. Тем самым мы должны найти решение $\psi_l^{(1)}(r, \chi')$ уравнения (3) при $n = 1$, удовлетворяющее граничному условию вида (4). С этой целью мы введем, следуя работе [16], релятивистские интегральные преобразования

$$\tilde{\psi}_l^{(1)}(\chi', \chi) = \int_0^\infty dr \psi_l^{(1)}(r, \chi') \psi_l^{(0)*}(r, \chi), \quad \tilde{V}_{11}^{(0)}(\chi) = \int_0^\infty dr V_{11}(r) \psi_l^{(0)*}(r, \chi), \quad (9)$$

$$\psi_l^{(1)}(r, \chi') = \int_1^\infty d\rho_l^{(0)}(\text{ch } \chi) \tilde{\psi}_l^{(1)}(\chi', \chi) \psi_l^{(0)}(r, \chi), \quad V_{11}(r) = \int_1^\infty d\rho_l^{(0)}(\text{ch } \chi) \tilde{V}_{11}^{(0)}(\chi) \psi_l^{(0)}(r, \chi), \quad (10)$$

где $d\rho_l^{(0)}(\text{ch } \chi)/d(\text{ch } \chi) \equiv d\rho_l(\text{ch } \chi)/d(\text{ch } \chi)$, а функция $\psi_l^{(0)}(r, \chi) \equiv \varphi_l(r, \chi)$ удовлетворяет условиям (6) и (7). Тогда, воспользовавшись результатами работы [16], будем иметь:

$$\psi_l^{(1)}(r, \chi') = \psi_l^{(0)}(r, \chi') + \frac{1}{2} \varepsilon_{11} N_{11}(\chi') P \int_1^\infty d\rho_l^{(0)}(\text{ch } \chi) \frac{\tilde{V}_{11}^{(0)}(\chi) \psi_l^{(0)}(r, \chi)}{\text{ch } \chi' - \text{ch } \chi},$$

$$N_{11}(\chi') = \varepsilon_{11} \tilde{V}_{11}^{(0)*}(\chi') / \Phi_{11}(\text{ch } \chi'), \quad \text{tg } \delta_l^{V_{11}}(\chi') = -(\pi/2) \varepsilon_{11} \text{sh}^{-1}(\chi') A_{11}(\chi') / \Phi_{11}(\text{ch } \chi'),$$

$$\Phi_{11}(\text{ch } \chi') = \varepsilon_{11} + \frac{1}{2} P \int_0^\infty d\chi \frac{|A_{11}(\chi)|}{\text{ch } \chi - \text{ch } \chi'}, \quad A_{11}(\chi') = \varepsilon_{11} \pi(\chi') |\tilde{V}_{11}^{(0)}(\chi')|^2, \quad (11)$$

где P — символ главного значения. Кроме того, волновая функция $\psi_l^{(1)}(r, \chi')$ имеет асимптотику

$$\psi_l^{(1)}(r, \chi') = \frac{|F_l^W(\chi')|}{Q_l(\text{cth } \chi') \cos \delta_l^{(1)}(\chi')} \sin \left[r\chi' - \frac{\pi l}{2} + \delta_l^{(1)}(\chi') \right] + O(e^{-\pi r/4}), \quad r \rightarrow \infty. \quad (12)$$

Здесь $\delta_l^{(1)}(\chi') = \delta_l^W(\chi') + \delta_l^{V_{11}}(\chi')$ — полный фазовый сдвиг, соответствующий первому шагу итерации, а $\delta_l^{V_{11}}(\chi')$ — его приращение, обусловленное компонентой $V_{11}(r)$ сепарабельного взаимодействия, причем $|\delta_l^{V_{11}}(\chi')| \leq \pi$ (истинных связанных состояний нет). Более того, она удовлетворяет условиям ортогональности и полноты:

$$\int_0^\infty dr \psi_l^{(1)}(r, \chi) \psi_l^{(1)*}(r, \chi') = \frac{\delta(\text{ch } \chi - \text{ch } \chi')}{d\rho_l^{(1)}(\text{ch } \chi)/d(\text{ch } \chi)}, \quad (13)$$

$$\int_1^\infty d\rho_l^{(1)}(\text{ch } \chi) \psi_l^{(1)}(r, \chi) \psi_l^{(1)*}(r', \chi) = \delta(r' - r) \quad (14)$$

со спектральной плотностью

$$d\rho_l^{(1)}(\text{ch } \chi)/d(\text{ch } \chi) = d\rho_l^{(0)}(\text{ch } \chi)/d(\text{ch } \chi) [\cos \delta_l^{V_{11}}(\chi)]^2, \quad (15)$$

что и обеспечивает продолжение итерационного процесса.

Теперь совершенно ясно, что на произвольном n -м шаге итерации мы должны искать решение $\psi_l^{(n)}(r, \chi')$ уравнения (3) с взаимодействием, равным суперпозиции $W(r)$ и $\sum_{m=1}^n \varepsilon_{lm} \times V_{lm}(r)V_{lm}(r')$ ($n = 1, 2, \dots, M_l$). При этом мы будем использовать свойства ортогональности и полноты для решения $\psi_l^{(n-1)}(r, \chi')$, полученного на $(n-1)$ -м шаге итерации. Эти свойства имеют вид

$$\int_0^{\infty} dr \psi_l^{(n-1)}(r, \chi) \psi_l^{(n-1)*}(r, \chi') = \frac{\delta(\text{ch } \chi - \text{ch } \chi')}{d\rho_l^{(n-1)}(\text{ch } \chi)/d(\text{ch } \chi)}, \quad (16)$$

$$\int_1^{\infty} d\rho_l^{(n-1)}(\text{ch } \chi) \psi_l^{(n-1)}(r, \chi) \psi_l^{(n-1)*}(r', \chi) = \delta(r' - r), \quad (17)$$

где

$$\frac{d\rho_l^{(n-1)}(\text{ch } \chi)}{d(\text{ch } \chi)} = \frac{d\rho_l^{(0)}(\text{ch } \chi)}{d(\text{ch } \chi)} \prod_{m=1}^{n-1} [\cos \delta_l^{V_{lm}}(\chi)]^2, \quad n = 1, 2, \dots, M_l. \quad (18)$$

Здесь $\delta_l^{V_{lm}}(\chi)$ — приращение фазового сдвига, обусловленное компонентой $V_{lm}(r)$ сепарабельного взаимодействия, причем, как и на первом шаге итерации, $|\delta_l^{V_{lm}}(\chi)| \leq \pi$ ($m = 1, 2, \dots, M_l - 1$). Тем самым мы можем, опираясь на соотношения (16) — (18), ввести релятивистские интегральные преобразования

$$\tilde{\psi}_l^{(n)}(\chi', \chi) = \int_0^{\infty} dr \psi_l^{(n)}(r, \chi') \psi_l^{(n-1)*}(r, \chi), \quad \tilde{V}_{ln}^{(n-1)}(\chi) = \int_0^{\infty} dr V_{ln}(r) \psi_l^{(n-1)*}(r, \chi), \quad (19)$$

$$\psi_l^{(n)}(r, \chi') = \int_1^{\infty} d\rho_l^{(n-1)}(\text{ch } \chi) \tilde{\psi}_l^{(n)}(\chi', \chi) \psi_l^{(n-1)}(r, \chi),$$

$$V_{ln}(r) = \int_1^{\infty} d\rho_l^{(n-1)}(\text{ch } \chi) \tilde{V}_{ln}^{(n-1)}(\chi) \psi_l^{(n-1)}(r, \chi), \quad n = 1, 2, \dots, M_l. \quad (20)$$

Тогда, применяя преобразования (20) к уравнению (3) с таким взаимодействием, мы получим

$$(\text{ch } \chi' - \text{ch } \chi) \tilde{\psi}_l^{(n)}(\chi', \chi) = \varepsilon_{ln} N_{ln}(\chi') \tilde{V}_{ln}^{(n-1)}(\chi)/2, \quad (21)$$

$$N_{ln}(\chi') = \int_0^{\infty} dr' V_{ln}(r') \psi_l^{(n)}(r', \chi') = \int_1^{\infty} d\rho_l^{(n-1)}(\text{ch } \chi) \tilde{\psi}_l^{(n)}(\chi', \chi) \tilde{V}_{ln}^{(n-1)*}(\chi), \quad n = 1, 2, \dots, M_l. \quad (22)$$

Теперь заметим, что в силу условий (5) имеет место асимптотика

$$\psi_l^{(n)}(r, \chi') = \frac{|F_l^W(\chi')|}{Q_l(\text{cth } \chi')} \prod_{m=1}^n [\cos \delta_l^{V_{lm}}(\chi')]^{-1} \sin \left[r\chi' - \frac{\pi l}{2} + \delta_l^{(n)}(\chi') \right] + O(e^{-\pi r/4}), \quad r \rightarrow \infty, \quad (23)$$

где $\delta_l^{(n)}(\chi') = \delta_l^W(\chi') + \sum_{m=1}^n \delta_l^{V_{lm}}(\chi')$ — полный фазовый сдвиг, соответствующий n -му шагу итерации ($n = 1, 2, \dots, M_l$). Кроме того, функция $\tilde{V}_{ln}^{(n-1)}(\chi)$ всюду непрерывна, а функция $Q_l(\text{cth } \chi) \prod_{m=1}^{n-1} \cos[\delta_l^{V_{lm}}(\chi)] \tilde{V}_{ln}^{(n-1)}(\chi) |F_l^W(\chi)|^{-1}$ дифференцируема при всех $\chi \geq 0$. Более того, из (19) для функции $\tilde{V}_{ln}^{(n-1)}(\chi)$ следуют оценки

$$Q_l(\text{cth } \chi) \prod_{m=1}^{n-1} \cos[\delta_l^{V_{lm}}(\chi)] \tilde{V}_{ln}^{(n-1)}(\chi) |F_l^W(\chi)|^{-1} = O(1), \quad |\chi| \rightarrow \infty, \quad \tilde{V}_{ln}^{(n-1)}(\chi) = O(1), \quad \chi \rightarrow 0, \quad (24)$$

если только условия (5) выполнены.

Для состояний рассеяния ($E' = \text{ch } \chi' \geq 1$) решение уравнения (21) имеет вид

$$\tilde{\psi}_l^{(n)}(\chi', \chi) = \frac{\delta(\text{ch } \chi - \text{ch } \chi')}{d\rho_l^{(n-1)}(\text{ch } \chi)/d(\text{ch } \chi)} + \frac{1}{2}\varepsilon_{ln}N_{ln}(\chi')P \frac{\tilde{V}_{ln}^{(n-1)}(\chi)}{\text{ch } \chi' - \text{ch } \chi}, \quad (25)$$

где множитель при δ -функции выбран в соответствии с нормировкой волновой функции: при $\varepsilon_{ln} \equiv 0$ представление (20) для $\psi_l^{(n)}(r, \chi')$ должно приводить к решению $\psi_l^{(n-1)}(r, \chi')$ ($n = 1, 2, \dots, M_l$). После подстановки решения (25) в представление (20) для $\psi_l^{(n)}(r, \chi')$ и (22) мы получим:

$$\psi_l^{(n)}(r, \chi') = \psi_l^{(n-1)}(r, \chi') + \frac{1}{2}\varepsilon_{ln}N_{ln}(\chi')P \int_1^\infty d\rho_l^{(n-1)}(\text{ch } \chi) \frac{\tilde{V}_{ln}^{(n-1)}(\chi)\psi_l^{(n-1)}(r, \chi)}{\text{ch } \chi' - \text{ch } \chi}, \quad (26)$$

$$N_{ln}(\chi') = \varepsilon_{ln}\tilde{V}_{ln}^{(n-1)*}(\chi')/\Phi_{ln}(\text{ch } \chi'), \quad (27)$$

где

$$\Phi_{ln}(\text{ch } \chi') = \varepsilon_{ln} + \frac{1}{2}P \int_0^\infty d\chi \frac{|A_{ln}(\chi)|}{\text{ch } \chi - \text{ch } \chi'}, \quad (28)$$

$$A_{ln}(\chi) = \varepsilon_{ln}\eta(\chi) \prod_{m=1}^{n-1} \left[\cos \delta_l^{V_{lm}}(\chi) \right]^2 \left| \tilde{V}_{ln}^{(n-1)}(\chi) \right|^2, \quad n = 1, 2, \dots, M_l. \quad (29)$$

Главное значение интегралов здесь существует, поскольку функция $\tilde{V}_{ln}^{(n-1)}(\chi)$ дифференцируема, а в силу условий (24) они также сходятся и на обоих пределах.

Далее, используя асимптотику (23) для $\psi_l^{(n-1)}(r, \chi')$ и четность подынтегральной функции в выражении (26), представим его в виде ($r \rightarrow \infty$)

$$\begin{aligned} \psi_l^{(n)}(r, \chi') &= \frac{|F_l^W(\chi')|}{Q_l(\text{cth } \chi')} \prod_{m=1}^{n-1} \left[\cos \delta_l^{V_{lm}}(\chi') \right]^{-1} \sin \left[r\chi' - \frac{\pi l}{2} + \delta_l^{(n-1)}(\chi') \right] - \varepsilon_{ln}N_{ln}(\chi')P \frac{1}{2\pi i} \times \\ &\int_{-\infty}^\infty d\chi \frac{Q_l(\text{cth } \chi)\tilde{V}_{ln}^{(n-1)}(\chi)}{|F_l^W(\chi)|(\text{ch } \chi - \text{ch } \chi')} \prod_{m=1}^{n-1} \cos \left[\delta_l^{V_{lm}}(\chi) \right] \exp \left[i \left(r\chi - \frac{\pi l}{2} + \delta_l^{(n-1)}(\chi) \right) \right] + O(e^{-\pi r/4}). \end{aligned}$$

Интеграл в последнем выражении легко вычисляется применением символического равенства $1/(\alpha - i\eta) = i\pi\delta(\alpha) + P(1/\alpha)$, $\eta \rightarrow +0$, и основной теоремы вычетов при интегрировании по границе полосы $0 \leq \text{Im } \chi \leq \pi/2$. В результате будем иметь

$$\begin{aligned} \psi_l^{(n)}(r, \chi') &= \frac{|F_l^W(\chi')|}{Q_l(\text{cth } \chi')} \prod_{m=1}^{n-1} \left[\cos \delta_l^{V_{lm}}(\chi') \right]^{-1} \sin \left[r\chi' - \frac{\pi l}{2} + \delta_l^{(n-1)}(\chi') \right] - \\ &\frac{\varepsilon_{ln}N_{ln}(\chi')Q_l(\text{cth } \chi')\tilde{V}_{ln}^{(n-1)}(\chi')}{\text{sh } \chi' |F_l^W(\chi')|} \prod_{m=1}^{n-1} \cos \left[\delta_l^{V_{lm}}(\chi') \right] \cos \left[r\chi' - \frac{\pi l}{2} + \delta_l^{(n-1)}(\chi') \right] + O(e^{-\pi r/4}). \quad (30) \end{aligned}$$

Наконец, принимая во внимание выражения (27)–(29), положим

$$\text{tg } \delta_l^{V_{lm}}(\chi') = -(\pi/2)\varepsilon_{ln} \text{sh}^{-1}(\chi')A_{ln}(\chi')/\Phi_{ln}(\text{ch } \chi'), \quad n = 1, 2, \dots, M_l. \quad (31)$$

Тогда асимптотика (30) принимает вид (23).

3. Связанные состояния и теорема Левинсона. Предположим, что существует хотя бы одно связанное состояние с энергией $E^{(n)} = \text{ch } \chi^{(n)}$ ($\chi^{(n)} \geq 0$ ($n = 1, 2, \dots, M_l$)). Тогда решение уравнения (21) имеет вид

$$\tilde{\psi}_l^{(n)}(\chi^{(n)}, \chi) = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ln} N_{ln}(\chi^{(n)}) P \frac{\tilde{V}_{ln}^{(n-1)}(\chi)}{\text{ch } \chi - E^{(n)}}, \quad n = 1, 2, \dots, M_l. \quad (32)$$

Подстановка решений (32) в равенство (22) приводит к уравнению на собственные значения

$$\Phi_{ln}(E^{(n)}) = \varepsilon_{ln} + \frac{1}{2} P \int_0^\infty d\chi \frac{|A_{ln}(\chi)|}{\text{ch } \chi - E^{(n)}} = 0, \quad n = 1, 2, \dots, M_l. \quad (33)$$

При этом для "поддельных" связанных состояний с энергиями

$$E_{fk}^{(n)} = \text{ch } \chi_{fk}^{(n)} \geq 1, \quad k = \begin{cases} 0, 1, \dots, \nu_l^{(n)} - 1, & \varepsilon_{ln} = 1, \\ 1, 2, \dots, \nu_l^{(n)}, & \varepsilon_{ln} = -1, \end{cases} \quad (34)$$

обусловленных n -й компонентой сепарабельного взаимодействия в каждой парциальной волне, уравнения (33) могут иметь решения при $\varepsilon_{ln} = \pm 1$ ($n = 1, 2, \dots, M_l$). В то же время для истинных связанных состояний с энергиями

$$0 \leq E_l^{(n)} = \text{ch } \chi_l^{(n)} < 1, \quad \chi_l^{(n)} = i\kappa_l^{(n)}, \quad 0 < \kappa_l^{(n)} \leq \pi/2, \quad (35)$$

уравнения (33) могут иметь решения только при $\varepsilon_{ln} = -1$. Но условия (16) — (18) будут выполняться только тогда, когда истинные связанные состояния при $n = 1, 2, \dots, M_l - 1$ отсутствуют, в то время как при $n = M_l$ оно может возникать. Это будет иметь место, если

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty d\chi \prod_{m=1}^{n-1} \left[\cos \delta_l^{V_{lm}}(\chi) \right]^2 \left| \tilde{V}_{ln}^{(n-1)}(\chi) / F_l^W(\chi) \right|^2 < 1 \quad (36)$$

при $\varepsilon_{ln} = -1$, $n = 1, 2, \dots, M_l - 1$ (истинных связанных состояний нет), в то время как

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty d\chi \prod_{m=1}^{M_l-1} \left[\cos \delta_l^{V_{lm}}(\chi) \right]^2 \left| \tilde{V}_{lM_l}^{(M_l-1)}(\chi) / F_l^W(\chi) \right|^2 > 1 \quad (37)$$

при $\varepsilon_{lM_l} = -1$ (имеется одно истинное связанное состояние при $n = M_l$). Последние условия связаны с тем, что для любых $l, \chi \geq 0$ функция $g_l(\chi)$ является ограниченной:

$$g_l(\chi) = \frac{1}{2} \frac{Q_l^2(\text{cth } \chi)}{\text{ch } \chi - E_l^{(n)}} \leq \max g_l(\chi) \approx \frac{\pi (\text{th } \chi_{\max})^{2l}}{4^{l+1} \text{ch } \chi_{\max}} \left[1 - \frac{l+1}{2l+3} \text{th}^2 \chi_{\max} \right] < 1.$$

Для "поддельных" связанных состояний с энергиями (34) асимптотика волновой функции дается выражением (30) с опущенным первым членом, т.е.

$$\psi_l^{(n)}(r, \chi_{fk}^{(n)}) = -\frac{\varepsilon_{ln} N_{ln}(\chi_{fk}^{(n)}) Q_l(\text{cth } \chi_{fk}^{(n)}) \tilde{V}_{ln}^{(n-1)}(\chi_{fk}^{(n)})}{\text{sh } \chi_{fk}^{(n)} \left| F_l^W(\chi_{fk}^{(n)}) \right|} \prod_{m=1}^{n-1} \cos \left[\delta_l^{V_{lm}}(\chi_{fk}^{(n)}) \right] \times \\ \cos \left[r \chi_{fk}^{(n)} - \frac{\pi l}{2} + \delta_l^{(n-1)}(\chi_{fk}^{(n)}) \right] + O(e^{-\pi r/4}), \quad r \rightarrow \infty, \quad n = 1, 2, \dots, M_l.$$

Отсюда следует, что волновая функция асимптотически стремится к нулю, если только

$$\tilde{V}_{ln}^{(n-1)}(\chi_{fk}^{(n)}) = 0, \quad n = 1, 2, \dots, M_l. \quad (38)$$

При этом граничные условия вида (4) также выполняются, а, следовательно, энергиям (34) соответствуют "поддельные" связанные состояния, обусловленные n -ой компонентой сепарабельного взаимодействия, и даются общими корнями уравнений (33) и (38). Более того, используя полученные результаты и выражение (31), заключаем, что при значениях энергий (34) приращения $\delta_l^{Vln}(\chi')$ фазы рассеяния проходят при возрастании χ' через значения πk ($k = \{0, 1, \dots, \nu_l^{(n)} - 1, \varepsilon_{ln} = 1; 1, 2, \dots, \nu_l^{(n)}, \varepsilon_{ln} = -1\}$), убывая. Это связано с тем, что при таких значениях энергий в силу условий (33) и (38) равны нулю как числитель, так и знаменатель в правой части равенства (31). Но при этом из определения (29) следует, что функция $A_{ln}(\chi')$ имеет в точках $\chi_{fk}^{(n)}$, по крайней мере, нуль второго порядка. В то же время знаменатель в (31) имеет в этих точках только простой нуль, поскольку

$$\left. \frac{d\Phi_{ln}(\operatorname{ch} \chi')}{d\chi'} \right|_{\chi'=\chi_{fk}^{(n)}} = \frac{1}{2} \operatorname{sh} \chi_{fk}^{(n)} \int_0^{\infty} d\chi \frac{|A_{ln}(\chi)|}{(\operatorname{ch} \chi - \operatorname{ch} \chi_{fk}^{(n)})^2} > 0.$$

А это означает, что $\operatorname{tg} \delta_l^{Vln}(\chi')$ обращается в нуль в точках $\chi_{fk}^{(n)}$ и меняет знак, т. е.

$$\delta_l^{Vln}(\chi_{fk}^{(n)}) = \pi k, \quad k = \begin{cases} 0, 1, \dots, \nu_l^{(n)} - 1, & \varepsilon_{ln} = 1, \\ 1, 2, \dots, \nu_l^{(n)}, & \varepsilon_{ln} = -1, \end{cases} \quad \left. \frac{d\delta_l^{Vln}(\chi')}{d\chi'} \right|_{\chi'=\chi_{fk}^{(n)}} < 0.$$

Если же знаменатель в (31) не обращается в нуль при $\chi' = \chi_{fk}^{(n)}$, то приращения фазового сдвига будут только касаться прямых $\delta_l^{Vln} = \pi k$ (k — целое) сверху или снизу, но не пересекать их.

Итак, если приращения фазового сдвига пересекают прямые $\delta_l^{Vln} = \pi k$ ($k = \{0, 1, \dots, \nu_l^{(n)} - 1, \varepsilon_{ln} = 1; 1, 2, \dots, \nu_l^{(n)}, \varepsilon_{ln} = -1\}$) сверху при возрастании χ' , т. е. условия (33) и (38) выполнены, то при энергиях (34) имеются $\nu_l^{(n)}$ "поддельных" связанных состояний, обусловленных n -й компонентой сепарабельного взаимодействия. Поэтому, исследуя поведение функций $\delta_l^{Vln}(\chi')$ при возрастании χ' , можно определить как значения этих энергий, так и знак величины ε_{ln} . При этом ее знак обратен знаку приращения $\delta_l^{Vln}(\chi')$ фазового сдвига при высоких энергиях ($\chi' \rightarrow +\infty$). Наконец, используя оценку (24), из выражения (31) легко находим, что $\operatorname{tg} \delta_l^{Vln}(\infty) = 0$. Следовательно, мы можем, как обычно [15, 16], выбрать

$$\delta_l^{Vln}(\infty) = 0, \quad n = 1, 2, \dots, M_l. \quad (39)$$

Теперь рассмотрим условия существования единственного истинного связанного состояния с энергией (35), обусловленного полным взаимодействием ($n = M_l$). Тогда энергия $E_t^{(M_l)}$ этого единственного связанного состояния будет определяться как корень уравнения (33) при выполнении условий (36), (37). При этом граничное условие (4), очевидно, выполняется, а асимптотика волновой функции находится путем подстановки решения (32) в представление (20) для $\psi_l^{(n)}(r, \chi')$ при $n = M_l$, использования асимптотики (23) для $\psi_l^{(M_l-1)}(r, \chi')$ и последующего применения основной теоремы вычетов при интегрировании по границе полосы $0 \leq \operatorname{Im} \chi \leq \pi/2$. В результате получаем $\psi_l^{(M_l)}(r, \chi_t^{(M_l)}) = O(\exp[-r \min(\kappa_t^{(M_l)}, \pi/4)])$, $r \rightarrow \infty$.

Для того чтобы в нашем случае получить теорему Левинсона, воспользуемся подходом, изложенным в работах [15, 16]. Тогда, учитывая условие (39) и обычную теорему Левинсона для локального квазипотенциала, не допускающего связанных состояний, т. е. $\delta_l^W(0) - \delta_l^W(\infty) = \delta_l^W(0) = 0$, окончательно получим $\delta_l^{Vln}(0) = \pi(\sigma_l^{(n)} - \sigma_l^{(n-1)} + \nu_l^{(n)})$, $n = 1, 2, \dots, M_l$. Здесь $\nu_l^{(n)}$ — число "поддельных" связанных состояний, обусловленных n -й компонентой сепарабельного квазипотенциала, с энергиями (34), а $\sigma_l^{(n)}$ — число истинных связанных состо-

яний, обусловленных суперпозицией локального $W(r)$ и n -компонентного нелокального сепарабельного квазипотенциалов, с энергиями (35), $\sigma_l^{(n)} = \begin{cases} 0, & \varepsilon_{ln} = 1, n = 1, 2, \dots, M_l, \\ 0, & \varepsilon_{ln} = -1, n = 1, 2, \dots, M_l - 1, \\ 1, & \varepsilon_{lM_l} = -1, n = M_l. \end{cases}$

4. Заключение. В данной работе дано решение конечно-разностного квазипотенциального уравнения с полным квазипотенциалом, описывающим взаимодействие двух релятивистских бесспиновых частиц неравных масс. При этом полное взаимодействие считается центрально-симметричным и допускающим существование только одного истинного связанного состояния и представляет собой суперпозицию локального и многокомпонентного нелокального сепарабельного квазипотенциалов. Рассмотрение проведено в рамках релятивистского квазипотенциального подхода к решению задач квантовой теории поля. В основе предложенного здесь метода решения квазипотенциального уравнения лежат свойства ортогональности и полноты для парциальной волновой функции локального квазипотенциала, считающегося известным и согласующимся с экспериментальными данными при низких энергиях. При этом показано, что парциальные волновые функции суперпозиции локального и n -компонентного нелокального сепарабельного квазипотенциалов также удовлетворяют свойствам ортогональности и полноты, что и обеспечило итерационный процесс. Это позволило найти выражения для приращений фазового сдвига и исследовать их свойства, определить условия существования истинных и "поддельных" связанных состояний и дать обобщение теоремы Левинсона.

Автор выражает искреннюю благодарность Ю. С. Вернову, А. М. Широкову и В. В. Андрееву за интерес к работе и полезное обсуждение полученных результатов.

Литература

1. Gourdin M., Martin A. // *Nuovo Cimento*. 1957. Vol. 6. P. 757 – 773; 1958. Vol. 8. P. 699 – 715.
2. Chadan K. // *Nuovo Cimento*. 1958. Vol. 10. P. 892 – 908; 1967. Vol. 157A. P. 510 – 525.
3. Bolsterli M., MacKenzie J. // *Physics*. 1965. Vol. 2. P. 141 – 149.
4. Tabakin F. // *Phys. Rev.* 1969. Vol. 177. P. 1443 – 1451.
5. Mills R. L., Reading J. F. // *J. Math. Phys.* 1969. Vol. 10. P. 321 – 331.
6. Barbieri R., Kogerler R., Kunszt Z., Gatto R. // *Nucl. Phys.* 1976. Vol. B105. P. 125 – 138.
7. McClary R., Byers N. // *Phys. Rev.* 1983. Vol. D28. P. 1692 – 1705.
8. Скачков Н. В., Соловцов И. Л. // *ЯФ*. 1979. Т. 30. С. 1079 – 1088; *ТМФ*. 1979. Т. 41. С. 205 – 219; *ЯФ*. 1980. Т. 31. С. 1332 – 1341; *ТМФ*. 1980. Т. 43. С. 330 – 342.
9. Мартыненко А. П., Фаустов Р. Н. // *ТМФ*. 1985. Т. 64. С. 179 – 187; *ЯФ*. 1998. Т. 61. С. 534 – 539; 2000. Т. 63. С. 915 – 919; 2001. Т. 64. С. 1358 – 1363.
10. Войкова Н. А., Тюхтяев Ю. Н., Фаустов Р. Н. // *ЯФ*. 2001. Т. 64. С. 986 – 989.
11. Kapshai V. N., Alferova T. A. // *J. Phys. A: Math. Gen.* 1999. Vol. 32. P. 5329 – 5334.
12. Logunov A. A., Tavkhelidze A. N. // *Nuovo Cimento*. 1963. Vol. 29. P. 380 – 400.
13. Kadyshevsky V. G. // *Nucl. Phys.* 1968. Vol. 6B. P. 125 – 148.
14. Кадышевский В. Г., Матеев М. Д., Мир-Касимов Р. М. // *ЯФ*. 1970. Т. 11. С. 692 – 700.
15. Черниченко Ю. Д. // *ЯФ*. 2000. Т. 63. С. 2068 – 2074; 2004. Т. 67. С. 433 – 442.
16. Черниченко Ю. Д. // *Весті НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук*. 2004. № 2. С. 72 – 80.

Yu. D. CHERNICHENKO

SOLVING OF THE RELATIVISTIC QUASIPOTENTIAL EQUATION FOR A SUM OF NONLOCAL SEPARABLE QUASIPOTENTIALS

Summary

Solving of the finite-difference quasipotential equation involving a total quasipotential simulating the interaction of two relativistic spinless particles of unequal masses is obtained. The total interaction consisting of the superposition of a local quasipotential and a sum of nonlocal separable quasipotentials is the spherically symmetric quasipotential and it admits one true bound state. The problem is investigated within the relativistic quasipotential approach to quantum field theory. Explicit expressions are obtained for the additionals of the phase shift and their properties are investigated, the conditions under which bound states may exist are determined and the Levinson theorem is generalized.