ЯДЕРНАЯ ФИЗИКА, 2005, том 68, № 1, с. 43–50

ЯДРА

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СУПЕРПОЗИЦИИ НЕЛОКАЛЬНОГО СЕПАРАБЕЛЬНОГО И ЛОКАЛЬНОГО КВАЗИПОТЕНЦИАЛОВ

© 2005 г. **Ю. Д. Черниченко**

Гомельский государственный технический университет, Беларусь

Поступила в редакцию 21.11.2003 г.; после доработки 09.04.2004 г.

Решена релятивистская обратная задача для случая, когда полный квазипотенциал, описывающий взаимодействие двух релятивистских бесспиновых частиц неравных масс, представляет собой суперпозицию нелокального сепарабельного и локального квазипотенциалов. Рассмотрение проведено в рамках релятивистского квазипотенциального подхода к квантовой теории поля. Локальная составляющая полного взаимодействия предполагается известной и допускающей существование связанных состояний. Показано, что нелокальная сепарабельная составляющая полного взаимодействия может быть восстановлена, если известны его локальная часть, приращение фазового сдвига и значения энергий связанных состояний.

Обратная задача имеет давнюю историю [1–3]. Наиболее полный обзор по нерелятивистской обратной задаче можно найти в монографиях [4, 5]. Однако задача восстановления взаимодействия в большинстве работ, в том числе для сепарабельных потенциалов, основана на нерелятивистском уравнении Шредингера [6–9]. Таким образом, решение релятивистской обратной задачи представляет научный интерес, в частности, в рамках релятивистского квазипотенциального подхода [10].

В настоящей работе в рамках релятивистского квазипотенциального подхода [11] рассматривается задача восстановления нелокальной сепарабельной составляющей полного квазипотенциала, описывающего взаимодействие двух релятивистских бесспиновых частиц неравных масс ($m_1 \neq m_2$). При этом локальная составляющая $W(r)$ полного взаимодействия считается известной и допускающей существование n_l связанных состояний с энергиями[1)]

$$0 \leq E_j = \mathrm{ch}\chi_j < 1, \quad \chi_j = i\kappa_j, \qquad (1)$$
$$0 < \kappa_j \leqslant \pi/2, \quad j = 1, 2, \ldots, n_l.$$

Мы покажем, что нелокальную сепарабельную составляющую $V_l(r)$ полного квазипотенциала можно восстановить, если известны его локальная часть $W(r)$, приращение фазового сдвига $\delta_l^V(\chi')$ и значения энергий связанных состояний. При этом мы будем исходить из выражения для приращения фазового сдвига, найденного автором в работе [12]:

$$\mathrm{tg}\,\delta_l^V(\chi') = -\frac{\pi}{2}\mathrm{sh}^{-1}\chi' A_l(\chi') \times \qquad (2)$$
$$\times \left[1 - \frac{\varepsilon_l}{2}\sum_{j=1}^{n_l} C_{lj}\frac{|\tilde{V}_l(\chi_j)|^2}{\mathrm{ch}\chi' - \mathrm{ch}\chi_j} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\mathrm{P}\int\limits_0^\infty d\chi \frac{A_l(\chi)}{\mathrm{ch}\chi - \mathrm{ch}\chi'}\right]^{-1},$$

$$A_l(\chi') = \frac{2}{\pi}\varepsilon_l|Q_l(\mathrm{cth}\chi')\tilde{V}_l(\chi')/F_l^W(\chi')|^2, \quad \varepsilon_l = \pm 1. \qquad (3)$$

Здесь P есть символ главного значения, $Q_l(z)$ – функция Лежандра второго рода, $\tilde{V}_l(\chi)$ – образ квазипотенциала $V_l(r)$, а $F_l^W(\chi')$ и C_{lj} суть функция Йоста и нормировочные константы, обусловленные чисто локальным квазипотенциалом $W(r)$[2)].

[1)] Здесь и далее мы используем систему единиц, в которой $\hbar = c = 1$.

[2)] Напомним, что функция Йоста $F_l^W(\chi')$ выражается через фазовый сдвиг $\delta_l^W(\chi')$ соотношением $F_l^W(\chi') = |F_l^W(\chi')|\exp[-i\delta_l^W(\chi')]$, а ее нули $\chi_j (j = 1, 2, \ldots, n_l)$, которые определяют значения энергий (1) связанных состояний локального квазипотенциала $W(r)$, расположены на положительной части мнимой оси в комплексной плоскости быстроты χ', параметризирующей в с.ц.и. энергию $E_{q'}$ одной эффективной релятивистской частицы массы $m' = \sqrt{m_1 m_2}$: $E' = E_{q'}/m' = \mathrm{ch}\chi'$. При этом нормировочные константы C_{lj} для собственных функций $\varphi_l(r, \chi_j)$ этих связанных состояний также выражаются через функцию Йоста: $C_{lj}^{-1} = \int_0^\infty dr \varphi_l(r, \chi_j)\varphi_l^*(r, \chi_j) = \frac{i}{4}[Q_l(\mathrm{cth}\chi_j)]^{-2} F_l^W \times (-\chi_j) dF_l^W(\chi_j)/d\chi_j$, $j = 1, 2, \ldots, n_l$.

Для того чтобы восстановить сепарабельную часть $V_l(r)$ полного квазипотенциала по приращению фазового сдвига $\delta_l^V(\chi')$, решим интегральное уравнение (2) относительно функции $A_l(\chi')$. При этом мы обобщим на релятивистский случай метод, предложенный Шаданом в работе [6] для решения соответствующей нерелятивистской обратной задачи. Затем, используя интегральное преобразование Гильберта, из (3) найдем функцию $\tilde{V}_l(\chi')$. Наконец, выполнив обобщенное релятивистское интегральное преобразование Ханкеля [12][3]:

$$V_l(r) = \int_0^\infty d\rho_l(\text{ch}\chi)\tilde{V}_l(\chi)\varphi_l(r,\chi) = \tag{4}$$

$$= \sum_{j=1}^{n_l} C_{lj}\tilde{V}_l(\chi_j)\varphi_l(r,\chi_j) + \int_0^\infty d\chi\tau_l(\chi)\tilde{V}_l(\chi)\varphi_l(r,\chi),$$

$$\tau_l(\chi) = \frac{2}{\pi}|Q_l(\text{cth}\chi)/F_l^W(\chi)|^2,$$

мы восстановим квазипотенциал $V_l(r)$[4].

Для единственности решения обратной задачи будем предполагать, что приращение фазового сдвига $\delta_l^V(\chi')$ в выражении (2) является непрерывной по Гельдеру функцией с некоторым положительным индексом и при $\chi' \to +\infty$ для него имеет место оценка

$$\delta_l^V(\chi') = O(\chi'^{-\gamma}), \quad l \geq 0, \quad \gamma > 1. \tag{5}$$

Эти требования означают, что квазипотенциал $V_l(r)$ удовлетворяет условию:

$$rV_l(r) \in L_1(0,\infty). \tag{6}$$

Кроме того, для приращения фазового сдвига справедлива теорема Левинсона [12]:

$$\delta_l^V(0) - \delta_l^V(\infty) = \delta_l^V(0) = \pi(\sigma_l - n_l + \nu_l), \tag{7}$$

причем

$$\delta_l^W(0) - \delta_l^W(\infty) = \delta_l^W(0) = \pi n_l.$$

Здесь σ_l — число связанных состояний полного квазипотенциала с энергиями

$$0 \leq E_{tj'} = \text{ch}\chi_{tj'} < 1, \quad \chi_{tj'} = i\kappa_{tj'}, \quad 0 < \kappa_{tj'} \leq \pi/2, \tag{8}$$

$$j' = 1,2,\ldots,\sigma_l, \quad \sigma_l = \begin{cases} n_l - 1\ (\Phi_l(1) < 0), \quad n_l\ (\Phi_l(1) > 0) & \text{при}\ \varepsilon_l = +1, \\ n_l\ (\Phi_l(1) < 0), \quad n_l + 1\ (\Phi_l(1) > 0) & \text{при}\ \varepsilon_l = -1, \end{cases}$$

где

$$\Phi_l(E') = \varepsilon_l \left[1 - \frac{\varepsilon_l}{2}\sum_{j=1}^{n_l}\frac{C_{lj}|\tilde{V}_l(\chi_j)|^2}{E' - E_j} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\text{P}\int_0^\infty d\chi \frac{A_l(\chi)}{\text{ch}\chi - E'}\right],$$

а ν_l — число "поддельных" связанных состояний с энергиями

$$E_{fk} = \text{ch}\chi_{fk} \geq 1, \quad k = \begin{cases} 0,1,\ldots,\nu_l - 1, \ \varepsilon_l = +1, \\ 1,2,\ldots,\nu_l, \ \varepsilon_l = -1. \end{cases} \tag{9}$$

При этом, как было установлено в работе [12], энергии (8) истинных связанных состояний полного квазипотенциала являются простыми корнями уравнения

$$\Phi_l(E_{tj'}) = \varepsilon_l \left[1 - \frac{\varepsilon_l}{2}\sum_{j=1}^{n_l}\frac{C_{lj}|\tilde{V}_l(\chi_j)|^2}{E_{tj'} - E_j} + \right. \tag{10}$$
$$\left. + \frac{1}{2}\int_0^\infty d\chi \frac{A_l(\chi)}{\text{ch}\chi - E_{tj'}}\right] = 0, \quad j' = 1,2,\ldots,\sigma_l.$$

В то же время энергии (9) "поддельных" связанных состояний находятся по тем значениям χ', при которых приращение фазового сдвига пересекает прямые $\delta_l^V = \pi k$ (k — целое) сверху при возраста-

[3]Заметим, что интегральное преобразование (4) при отсутствии локального взаимодействия ($W(r) \equiv 0$) переходит в релятивистское интегральное преобразование Ханкеля, введенное в работе [13].

[4]Здесь $\varphi_l(r,\chi)$ представляет собой регулярное решение конечно-разностного квазипотенциального уравнения с локальным квазипотенциалом $W(r)$, допускающим существование n_l связанных состояний с энергиями (1), а

$$\frac{d\rho_l(\text{ch}\chi)}{d(\text{ch}\chi)} = \begin{cases} \text{sh}^{-1}\chi\,\tau_l(\chi), \quad E = \text{ch}\chi \geq 1, \\ \sum\limits_{j=1}^{n_l} C_{lj}\delta(\text{ch}\chi - \text{ch}\chi_j), \quad 0 \leq E = \text{ch}\chi < 1, \\ \chi = i\kappa, \quad \chi_j = i\kappa_j, \quad 0 < \kappa, \ \kappa_j \leq \pi/2, \end{cases}$$

есть спектральная плотность, соответствующая локальному квазипотенциалу $W(r)$.

нии χ', т.е.

$$\delta_l^V(\chi_{fk}) = \pi k, \quad k = \begin{cases} 0, 1, \ldots, \nu_l - 1, \ \varepsilon_l = +1, \\ 1, 2, \ldots, \nu_l, \ \varepsilon_l = -1. \end{cases} \tag{11}$$

Сделаем замену переменных $x = \mathrm{ch}\chi'$, $t = \mathrm{ch}\chi$ и введем следующие обозначения:

$$\Delta_l^V(x) = \delta_l^V(\mathrm{arch}x), \tag{12}$$
$$g_l(x) = -(2/\pi)(x^2-1)^{1/2}\,\mathrm{tg}\,\Delta_l^V(x),$$
$$\psi_l(x) = A_l(\mathrm{arch}x)g_l^{-1}(x) \times$$
$$\times [1 + i(\pi/2)g_l(x)(x^2-1)^{-1/2}],$$
$$h_l(x) = (\pi/2)g_l(x)(x^2-1)^{-1/2} \times$$
$$\times [1 - i(\pi/2)g_l(x)(x^2-1)^{-1/2}]^{-1} =$$
$$= -\sin\Delta_l^V(x)\exp[-i\Delta_l^V(x)].$$

Тогда интегральное уравнение (2) преобразуется к виду

$$\psi_l(x) = 1 - \frac{\varepsilon_l}{2}\sum_{j=1}^{n_l} C_{lj}\frac{|\tilde{V}_l(\chi_j)|^2}{x - E_j} + \tag{13}$$
$$+ \frac{1}{\pi}\int_1^\infty dt \frac{\psi_l(t)h_l^*(t)}{t - x - i0}.$$

Интегральное уравнение (13) является неоднородным интегральным уравнением, как и в случае, когда локальная часть полного квазипотенциала отсутствует ($W(r) \equiv 0$) [13]. Более того, оно по форме совпадает с соответствующим ему нерелятивистским аналогом, полученным в работе [6]. Для его решения рассмотрим функцию

$$H_l(z) = \mu_l(z) + \frac{1}{\pi}\int_1^\infty dt \frac{\psi_l(t)h_l^*(t)}{t - z}, \tag{14}$$

где

$$\mu_l(z) = 1 - \frac{\varepsilon_l}{2}\sum_{j=1}^{n_l} C_{lj}\frac{|\tilde{V}_l(\chi_j)|^2}{z - E_j}.$$

Очевидно, функция $H_l(z)$ является аналитической в комплексной плоскости переменной z с разрезом от 1 до $+\infty$, за исключением простых полюсов в точках $z = E_j$ $(0 \le E_j < 1, j = 1, 2, \ldots, n_l)$, причем

$$\lim_{|z|\to\infty} H_l(z) = 1 \tag{15}$$

во всех направлениях, если только функция $\psi_l(x)$ непрерывна по Гельдеру, а интеграл в (14) сходится.

Тогда решение интегрального уравнения (13) будет иметь вид

$$\psi_l(x) = H_l(x_+) \equiv \lim_{\eta\to+0} H_l(x + i\eta), \quad 1 \le x \le \infty. \tag{16}$$

Функцию $H_l(z)$ представим в форме

$$H_l(z) = \mu_l(z) + G_l(z)\exp[\omega_l(z)], \tag{17}$$

где

$$\omega_l(z) = -\frac{1}{\pi}\int_1^\infty dt \frac{\Delta_l^V(t)}{t - z}, \tag{18}$$

причем из предположений о поведении приращения фазового сдвига и условий (5) и (15) следует, что во всех направлениях

$$\lim_{|z|\to\infty} \omega_l(z) = 0, \quad \lim_{|z|\to\infty} G_l(z) = 0. \tag{19}$$

Кроме того, функция $G_l(z)$ должна быть аналитической в комплексной плоскости переменной z с разрезом от 1 до $+\infty$, а функция (18) определена на разрезе всюду, кроме, быть может, точки $z = 1$, где ее поведение дается выражением

$$\omega_l(z) = (1/\pi)\Delta_l^V(1)\ln|1 - z| + \Omega_l(z), \quad z \to 1. \tag{20}$$

Здесь функция $\Omega_l(z)$ конечна при $z \to 1$, а $\Delta_l^V(1) = \delta_l^V(0) = \pi(\sigma_l - n_l + \nu_l)$ в соответствии с теоремой Левинсона (7). Тем самым функция $\exp[\omega_l(z)]$ либо конечна при $\sigma_l - n_l + \nu_l = 0$, либо имеет нуль порядка $\sigma_l - n_l + \nu_l > 0$ в точке $z = 1$[5)].

Для скачка функции $H_l(z)$ на разрезе имеем

$$H_l(x_+) - H_l(x_-) = G_l(x_+)\exp[\omega_l(x_+)] - \tag{21}$$
$$- G_l(x_-)\exp[\omega_l(x_-)] =$$
$$= -2i\sin\Delta_l^V(x)\exp[i\Delta_l^V(x)]\psi_l(x).$$

Подставив решение (16) в выражение (21) и учитывая представление (17), приходим к неоднородному уравнению Римана–Гильберта для функции $G_l(z)$:

$$G_l(x_+)\exp[\omega_l(x_+) + 2i\Delta_l^V(x)] -$$
$$- G_l(x_-)\exp[\omega_l(x_-)] = \mu_l(x)\{1 - \exp[2i\Delta_l^V(x)]\}, \tag{22}$$

[5)] В том случае, когда $\delta_l^V(0) = -\pi$, т.е. при $\sigma_l = n_l - 1$, $n_l \ne 0$ и $\nu_l = 0$ $(\varepsilon_l = +1)$, функция $H_l(z)$, а значит, и функция $\psi_l(x)$ не являются более конечными при $z = 1$. Следовательно, решение обратной задачи в этом случае требует отдельного рассмотрения.

где

$$\omega_l(x_\pm) = \lim_{\eta\to+0}\omega_l(x \pm i\eta) = = \alpha_l(x) \mp i\Delta_l^V(x), \quad (23)$$

$$\alpha_l(x) = -\frac{1}{\pi}\mathrm{P}\int_1^\infty dt \frac{\Delta_l^V(t)}{t-x}, \quad 1 \le x \le \infty. \quad (24)$$

Далее, учитывая выражение (23), уравнение (22) преобразуем к виду

$$G_l(x_+) - G_l(x_-) = -\mu_l(x)\{\exp[-\omega_l(x_+)] - - \exp[-\omega_l(x_-)]\}, \quad 1 \le x \le \infty. \quad (25)$$

Частное решение уравнения (25), удовлетворяющее условиям (19), дается выражением

$$\tilde{G}_l(z) = 1 - \mu_l(z)\exp[-\omega_l(z)] - - \frac{\varepsilon_l}{2}\sum_{j=1}^{n_l} C_{lj}\frac{|\tilde{V}_l(\chi_j)|^2}{z - E_j}\exp[-\omega_l(E_j)].$$

Отсюда находим, что частное решение $\tilde{\psi}_l(x)$ неоднородного интегрального уравнения (13) в соответствии с выражениями (16) и (17) имеет вид

$$\tilde{\psi}_l(x) = \exp[\omega_l(x_+)] \times \left\{1 - \frac{\varepsilon_l}{2}\sum_{j=1}^{n_l} C_{lj}\frac{|\tilde{V}_l(\chi_j)|^2}{x - E_j}\exp[-\omega_l(E_j)]\right\}. \quad (26)$$

При этом функция (26) регулярна в точке $x = 1$ (либо она конечна при $\sigma_l - n_l + \nu_l = 0$, либо имеет нуль порядка $\sigma_l - n_l + \nu_l > 0$ в этой точке), непрерывна по Гельдеру с тем же индексом, что и приращение фазового сдвига, и ограничена при $x \to +\infty$, а это совпадает с априорными предположениями о ее свойствах. Более того, функция (26) удовлетворяет уравнению (13), поскольку по теореме о вычетах мы можем записать

$$\lim_{\substack{R\to+\infty \\ \eta\to+0}} \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^+} dz \frac{\tilde{H}_l(z)}{z - x - i\eta} = = \mathrm{res}\left[\frac{\tilde{H}_l(z)}{z - x - i\eta}, z = x + i\eta\right]\Bigg|_{\eta\to+0} + + \sum_{j=1}^{n_l}\delta_{nj}\mathrm{res}\left[\frac{\tilde{H}_l(z)}{z - x - i\eta}, z = E_n\right]\Bigg|_{\eta\to+0},$$

где

$$\tilde{H}_l(z) = \left\{1 - \frac{\varepsilon_l}{2}\sum_{n=1}^{n_l} C_{ln}\frac{|\tilde{V}_l(\chi_n)|^2}{z - E_n}\exp[-\omega_l(E_n)]\right\} \times \exp[\omega_l(z)],$$

а Γ^+ есть замкнутый контур, состоящий из окружностей C_R^+ радиуса R с центром в точке $z = 0$, C_η^- радиуса η с центром в точке $z = 1$ и двух берегов разреза от 1 до R, проходимых в противоположных направлениях. При этом вклад интеграла по окружности C_R^+, согласно асимптотике (19), стремится к 1 при $R \to +\infty$, а вклад интеграла по окружности C_η^- стремится к нулю при $\eta \to \to +0$, если исходить из оценки (20) и выводов, приведенных в подстрочном примечании 5). Отсюда, учитывая выражение (23), получим

$$1 + \frac{1}{\pi}\int_1^\infty dt\frac{\tilde{\psi}_l(t)h_l^*(t)}{t - x - i0} = \tilde{\psi}_l(x) + + \frac{\varepsilon_l}{2}\sum_{j=1}^{n_l} C_{lj}\frac{|\tilde{V}_l(\chi_j)|^2}{x - E_j},$$

т.е. функция $\tilde{\psi}_l(x)$, определяемая выражением (26), является частным решением неоднородного интегрального уравнения (13).

Общее решение однородного уравнения

$$\psi_{lo}(x) = \frac{1}{\pi}\int_1^\infty dt\frac{\psi_{lo}(t)h_l^*(t)}{t - x - i0} \quad (27)$$

имеет вид

$$\psi_{lo}(x) = H_{lo}(x_+) = = \lim_{\eta\to+0} H_{lo}(x + i\eta), \quad 1 \le x \le \infty, \quad (28)$$

где функция

$$H_{lo}(z) = \frac{1}{\pi}\int_1^\infty dt\frac{\psi_{lo}(t)h_l^*(t)}{t - z} \quad (29)$$

является аналитической в комплексной плоскости переменной z с разрезом от 1 до $+\infty$, причем во всех направлениях

$$\lim_{|z|\to\infty} H_{lo}(z) = 0. \quad (30)$$

Кроме того, функция (29) удовлетворяет однородному уравнению Римана–Гильберта

$$H_{lo}(x_+)\exp[2i\Delta_l^V(x)] - H_{lo}(x_-) = 0, \quad 1 \le x \le \infty, \quad (31)$$

следующему из выражения (21) для скачка функции $H_l(z) \equiv H_{lo}(z)$ на разрезе и из представления

(28). Поэтому общее решение уравнения (27) будем искать в виде

$$H_{lo}(z) = \exp[\omega_l(z)] \sum_{k=0}^{m} \frac{A_k}{(z-1)^k}. \qquad (32)$$

Подстановка выражения (32) в уравнение (31) и требование конечности функции $H_{lo}(z)$ при $z = 1$ (она либо конечна при $\sigma_l - n_l + \nu_l = 0$, либо имеет нуль порядка $\sigma_l - n_l + \nu_l > 0$ в этой точке) дает

$$m = \begin{cases} \sigma_l - n_l + \nu_l > 0, \\ 0 \text{ при } \sigma_l - n_l + \nu_l = 0, \end{cases}$$

причем $A_0 = 0$ при $m = \sigma_l - n_l + \nu_l = 0$. Следовательно,

$$\psi_{lo}(x) = H_{lo}(x_+) = \exp[\omega_l(x_+)] \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{\sigma_l - n_l + \nu_l} \dfrac{A_k}{(x-1)^k} & \text{при } \sigma_l - n_l + \nu_l > 0, \\ 0 \quad \text{при } \sigma_l - n_l + \nu_l = 0. \end{cases} \qquad (33)$$

При этом, как и в случае частного решения, в результате интегрирования по контуру Γ^+ приходим к выводу, что функция (33) является решением уравнения (27) и обладает всеми требуемыми свойствами.

Таким образом, общее решение интегрального уравнения (13), в соответствии с соотношениями (23), (24), (26) и (33), дается выражением

$$\psi_l(x) = \tilde{\psi}_l(x) + \psi_{lo}(x) = \exp[\alpha_l(x) - i\Delta_l^V(x)] \times \qquad (34)$$

$$\times \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{\sigma_l - n_l + \nu_l} \frac{A_k}{(x-1)^k} - \right.$$

$$\left. - \frac{\varepsilon_l}{2} \sum_{j=1}^{n_l} C_{lj} \frac{|\tilde{V}_l(\chi_j)|^2}{x - E_j} \exp[-\omega_l(E_j)] \right\}.$$

Наконец, принимая во внимание обозначения (12) и преобразуя сумму в произведение, решение (34) можно записать в двух формах:

$$A_l(\chi') = -\frac{2}{\pi} \mathrm{sh}\chi' \sin\delta_l^V(\chi') \exp[\alpha_l(\mathrm{ch}\chi')] \times \qquad (35)$$

$$\times \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{N_l} \frac{A_k}{(\mathrm{ch}\chi' - 1)^k} - \sum_{j=1}^{n_l} \frac{B_j}{\mathrm{ch}\chi' - E_j} \right\},$$

$$A_l(\chi') = -\frac{2}{\pi} \mathrm{sh}\chi' \sin\delta_l^V(\chi') \exp[\alpha_l(\mathrm{ch}\chi')] \times \qquad (36)$$

$$\times \prod_{k=1-\delta}^{N_l - \delta} \left(1 + \frac{a_k}{\mathrm{ch}\chi' - 1} \right) \prod_{j=1}^{n_l} \left(1 - \frac{b_j}{\mathrm{ch}\chi' - E_j} \right),$$

где

$$\alpha_l(\mathrm{ch}\chi') = -\frac{1}{\pi} \mathrm{P} \int_0^{\infty} d\chi \frac{\mathrm{sh}\chi \delta_l^V(\chi)}{\mathrm{ch}\chi - \mathrm{ch}\chi'}, \qquad (37)$$

$$B_j = \frac{\varepsilon_l}{2} C_{lj} |\tilde{V}_l(\chi_j)|^2 \exp[-\omega_l(E_j)], \qquad (37а)$$

$$N_l = \sigma_l - n_l + \nu_l = \begin{cases} \nu_l - 1, \sigma_l = n_l - 1, \varepsilon_l = +1, \\ \nu_l, \sigma_l = n_l, \varepsilon_l = \pm 1, \\ \nu_l + 1, \sigma_l = n_l + 1, \varepsilon_l = -1, \end{cases} \qquad (38)$$

$$\delta = \begin{cases} 1, \varepsilon_l = +1, \\ 0, \varepsilon_l = -1. \end{cases}$$

Очевидно, что решения (35) и (36) зависят от $N_l + n_l = \sigma_l + \nu_l$ параметров $\{A_k\}$, $\{B_j\}$ и $\{a_k\}$, $\{b_j\}$ соответственно, причем зависимости между этими параметрами устанавливаются из соотношения

$$1 + \sum_{k=1}^{N_l} \frac{A_k}{(\mathrm{ch}\chi' - 1)^k} - \sum_{j=1}^{n_l} \frac{B_j}{\mathrm{ch}\chi' - E_j} = \qquad (39)$$

$$= \prod_{k=1-\delta}^{N_l - \delta} \left(1 + \frac{a_k}{\mathrm{ch}\chi' - 1} \right) \prod_{j=1}^{n_l} \left(1 - \frac{b_j}{\mathrm{ch}\chi' - E_j} \right).$$

В частности, из соотношения (39) легко находим

$$B_j = b_j \prod_{\substack{n=1 \\ n \neq j}}^{n_l} \left(1 - \frac{b_n}{E_j - E_n} \right) \prod_{k=1-\delta}^{N_l - \delta} \left(1 - \frac{a_k}{1 - E_j} \right), \qquad (40)$$

$$j = 1, 2, \ldots, n_l,$$

где N_l и δ определены в (38).

Заметим, что решение (35) в нерелятивистском пределе, когда $\chi' \ll 1$, совпадает с его нерелятивистским аналогом, найденным в работе [6]. В то же время вопрос о единственности определения параметров нерелятивистской обратной задачи в этой работе исследован не был.

Для нахождения параметров $\{a_k\}$ и $\{b_j\}$ заметим, что функция $A_l(\chi')$ по определению (3) должна сохранять свой знак при всех значениях χ', в то время как приращение фазового сдвига при значениях энергий (9) "поддельных" связанных состояний удовлетворяет условию (11). Следовательно, при переходе через точки χ_{fk} (соотношение (9)) изменение знака $\sin\delta_l^V(\chi')$ должно совпадать с изменением знака выражения, состоящего из произведений по k и j в правой части решения (36). Это требование будет выполнено, если

$$a_k = 1 - \mathrm{ch}\chi_{fk}, \quad k = \begin{cases} 0, 1, \ldots, N_l - 1, & \varepsilon_l = +1, \\ 1, 2, \ldots, N_l, & \sigma_l = n_l, \ \varepsilon_l = -1, \\ 1, 2, \ldots, N_l - 1, & \sigma_l = n_l + 1, \ \varepsilon_l = -1, \end{cases} \tag{41}$$
$$b_{n_l} = \mathrm{ch}\chi_{f(\nu_l-1)} - \mathrm{ch}\chi_{n_l}, \quad \sigma_l = n_l - 1, \ \varepsilon_l = +1.$$

Далее, используя σ_l уравнений (10) для энергий (8), мы можем найти оставшиеся значения параметров $\{b_j\}$ и a_{ν_l+1}. С этой целью подставим решение (36) в уравнения (10) для энергий (8). Тогда, учитывая соотношение (37a), мы получим

$$1 - \sum_{j=1}^{n_l} \frac{B_j \exp[\omega_l(E_j)]}{E_{tj'} - E_j} - \tag{42}$$
$$- \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\chi \frac{\mathrm{sh}\chi \sin\delta_l^V(\chi) \exp[\alpha_l(\mathrm{ch}\chi)]}{\mathrm{ch}\chi - E_{tj'}} \times$$
$$\times \prod_{k=1-\delta}^{N_l-\delta} \left(1 + \frac{a_k}{\mathrm{ch}\chi - 1}\right) \prod_{j=1}^{n_l} \left(1 - \frac{b_j}{\mathrm{ch}\chi - E_j}\right) = 0,$$
$$j' = 1, 2, \ldots, \sigma_l.$$

Выполним в (42) замену переменной $x = \mathrm{ch}\chi$ и воспользуемся соотношением (23). Тогда вместо (42) будем иметь

$$1 - \sum_{j=1}^{n_l} \frac{B_j \exp[\omega_l(E_j)]}{E_{tj'} - E_j} + \tag{43}$$
$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_1^\infty dx \frac{\exp[\omega_l(x_+)] - \exp[\omega_l(x_-)]}{x - E_{tj'}} \times$$
$$\times \prod_{k=1-\delta}^{N_l-\delta} \left(1 + \frac{a_k}{x - 1}\right) \prod_{j=1}^{n_l} \left(1 - \frac{b_j}{x - E_j}\right) = 0,$$
$$j' = 1, 2, \ldots, \sigma_l.$$

Теперь заметим, что по теореме о вычетах мы можем записать

$$\lim_{\substack{R \to +\infty \\ \eta \to +0}} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma+} \frac{dz \exp[\omega_l(z)]}{z - E_{tj'}} \prod_{k=1-\delta}^{N_l-\delta} \left(1 + \frac{a_k}{z - 1}\right) \times$$
$$\times \prod_{j=1}^{n_l} \left(1 - \frac{b_j}{z - E_j}\right) =$$
$$= 1 + \frac{1}{2\pi i} \int_1^\infty dx \frac{\exp[\omega_l(x_+)] - \exp[\omega_l(x_-)]}{x - E_{tj'}} \times$$
$$\times \prod_{k=1-\delta}^{N_l-\delta} \left(1 + \frac{a_k}{x - 1}\right) \prod_{j=1}^{n_l} \left(1 - \frac{b_j}{x - E_j}\right) =$$
$$= \mathrm{res}\left\{\frac{\exp[\omega_l(z)]}{z - E_{tj'}} \prod_{k=1-\delta}^{N_l-\delta} \left(1 + \frac{a_k}{z - 1}\right) \times \right.$$
$$\left. \times \prod_{j=1}^{n_l} \left(1 - \frac{b_j}{z - E_j}\right), z = E_{tj'}\right\} +$$
$$+ \sum_{j=1}^{n_l} \mathrm{res}\left\{\frac{\exp[\omega_l(z)]}{z - E_{tj'}} \prod_{k=1-\delta}^{N_l-\delta} \left(1 + \frac{a_k}{z - 1}\right) \times \right.$$
$$\left. \times \prod_{n=1}^{n_l} \left(1 - \frac{b_n}{z - E_n}\right), z = E_j\right\}, \quad j' = 1, 2, \ldots, \sigma_l.$$

Здесь Γ^+ — тот же замкнутый контур, что и при интегрировании функции $\tilde{H}_l(z)$. Кроме того, мы также учли, что вклад интеграла по окружности C_R^+ в соответствии с асимптотикой (19) стремится к 1 при $R \to +\infty$, а вклад интеграла по окружности C_η^- стремится к нулю при $\eta \to +0$, если следовать оценке (20) и выводам подстрочного примечания 5). Следовательно, уравнения (43), с учетом последнего результата, принимают вид

$$\exp[\omega_l(E_{tj'})] \prod_{k=1-\delta}^{N_l-\delta} \left(1 - \frac{a_k}{1 - E_{tj'}}\right) \times \tag{44}$$

$$\times \prod_{j=1}^{n_l} \left(1 - \frac{b_j}{E_{tj'} - E_j}\right) = 0, \quad j' = 1, 2, \ldots, \sigma_l.$$

Отсюда, принимая во внимание выражение (41), находим:

$$b_j = \mathrm{ch}\chi_{tj'} - \mathrm{ch}\chi_j, \tag{45}$$

$$j' = j = \begin{cases} 1, 2, \ldots, \sigma_l; \ \sigma_l = n_l - 1 \ (\Phi_l(1) < 0), \ n_l \ (\Phi_l(1) > 0), \ \varepsilon_l = +1, \\ 1, 2, \ldots, n_l; \ \sigma_l = n_l \ (\Phi_l(1) < 0), \ n_l + 1 \ (\Phi_l(1) > 0), \ \varepsilon_l = -1, \end{cases}$$

$$a_{\nu_l+1} = 1 - \mathrm{ch}\chi_{t(n_l+1)}, \ \sigma_l = n_l + 1 \ (\Phi_l(1) > 0), \ \varepsilon_l = -1.$$

Отметим, что уравнения (44) допускают и решения вида

$$b_j = E_{tj} - E_j = 0.$$

Значит, в этом случае имеет место вырождение при энергиях E_j, причем $E_{tj} = E_{t(j+1)} = E_j$, т.е. степень вырождения для каждого E_j не может быть больше двух. Кроме того, из (44) также следует, что хотя бы один из параметров $\{b_j\}$ отличен от нуля [12].

Итак, коэффициенты $\{a_k\}$ и $\{b_j\}$ определяются однозначно. Поэтому, учитывая выражения (41) и (45), решение (36) представим в следующем виде:

$$A_l(\chi') = -\frac{2}{\pi}\mathrm{sh}\chi' \sin\delta_l^V(\chi')\exp[\alpha_l(\mathrm{ch}\chi')] \times \tag{46}$$

$$\times [\mathrm{sh}(\chi'/2)]^{-2N_l} \prod_{j'=1}^{\sigma_l} [\mathrm{sh}^2(\chi'/2) + \sin^2(\kappa_{tj'}/2)] \times$$

$$\times \prod_{j=1}^{n_l} [\mathrm{sh}^2(\chi'/2) + \sin^2(\kappa_j/2)]^{-1} \times$$

$$\times \prod_{k=1-\delta}^{\nu_l-\delta} [\mathrm{sh}^2(\chi'/2) - \mathrm{sh}^2(\chi_{fk}/2)],$$

где σ_l определено в (8), а N_l и δ — в (38).

Таким образом, решение (46) однозначно определяется энергиями (1) и (8) связанных состояний локального $W(r)$ и полного квазипотенциалов соответственно и приращением фазового сдвига, так как значения χ_{fk} также задаются его поведением — условием (11). Кроме того, из (37) и (46) следует, что функция $A_l(\chi')$ непрерывна по Гельдеру и при $|\chi'| \to \infty$ она имеет асимптотику

$$\mathrm{ch}\chi'|\chi'|^{-\gamma}, \quad \gamma > 1,$$

если только приращение фазового сдвига удовлетворяет условию (5), а следовательно, квазипотенциал $V_l(r)$ удовлетворяет условию (6).

Для восстановления квазипотенциала $V_l(r)$ с помощью преобразования (4) необходимо, опираясь на выражение (46), найти (в отличие от нерелятивистского случая [6]) комплексную функцию $\tilde{V}_l(\chi')$. С этой целью введем функцию

$$\hat{V}_l(\mathrm{sh}(\chi'/2)) = \prod_{j'=1}^{\sigma_l} \left[\frac{\mathrm{sh}(\chi'/2) + i\sin(\kappa_{tj'}/2)}{\mathrm{sh}(\chi'/2) - i\sin(\kappa_{tj'}/2)}\right] \times \tag{47}$$

$$\times \prod_{j=1}^{n_l} \left[\frac{\mathrm{sh}(\chi'/2) - i\sin(\kappa_j/2)}{\mathrm{sh}(\chi'/2) + i\sin(\kappa_j/2)}\right] \times$$

$$\times |Q_l(\mathrm{cth}\chi')/F_l^W(\chi')|^2[\tilde{V}_l^{(-)}(\mathrm{sh}(\chi'/2))]^2,$$

где

$$|\tilde{V}_l^{(-)}(\mathrm{sh}(\chi'/2))| = |\tilde{V}_l(\chi')|, \tag{48}$$

$$\mathrm{Re}\tilde{V}_l^{(-)}(\mathrm{sh}(\chi'/2)) = \mathrm{Re}\tilde{V}_l(\chi'),$$

$$\arg\tilde{V}_l^{(-)}(-\mathrm{sh}(\chi'/2)) = -\arg\tilde{V}_l^{(-)}(\mathrm{sh}(\chi'/2)).$$

Поскольку $\arg\tilde{V}_l(-\chi') = \arg\tilde{V}_l(\chi')$ то в силу условий (48) это означает, что

$$\arg\tilde{V}_l(\chi') = \mathrm{sgn}\chi' \arg\tilde{V}_l^{(-)}(\mathrm{sh}(\chi'/2)). \tag{49}$$

Тогда функция $\hat{V}_l(\mathrm{sh}(\chi'/2))$ является аналитической в полосе $0 < \mathrm{Im}\chi' \le \pi/2$, непрерывна при $0 \le \le \mathrm{Im}\chi' \le \pi/2$ и для нее справедлива оценка

$$\hat{V}_l(\mathrm{sh}(\chi'/2)) = O(\mathrm{sh}^2(\chi'/2)), \tag{50}$$

$$|\chi'| \to \infty, \quad 0 \le \mathrm{Im}\chi' \le \pi/2,$$

если только условие (5) выполняется. Более того, функция $\hat{V}_l(\mathrm{sh}(\chi'/2))$ нигде не обращается в нуль в полосе $0 < \mathrm{Im}\chi' \le \pi/2$. Тем самым функция $\ln\hat{V}_l(\mathrm{sh}(\chi'/2))$ является аналитической в полосе $0 < \mathrm{Im}\chi' \le \pi/2$ и ведет себя как $\ln\mathrm{sh}^2(\chi'/2)$ при $|\chi'| \to \infty$ в силу оценки (50). Следовательно, мы имеем право применить интегральное преобразование Гильберта к действительной и мнимой частям функции $\ln\hat{V}_l(\mathrm{sh}(\chi'/2))$. Тогда для действительных χ' имеем

$$\mathrm{Im}\ln\hat{V}_l(\mathrm{sh}(\chi'/2)) =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\mathrm{P}\int_{-\infty}^{\infty} d(\mathrm{sh}(\chi/2))\frac{\mathrm{Re}\ln\hat{V}_l(\mathrm{sh}(\chi/2))}{\mathrm{sh}(\chi/2) - \mathrm{sh}(\chi'/2)} =$$

$$= -\frac{2\mathrm{sh}(\chi'/2)}{\pi}\mathrm{P}\int\limits_0^\infty d\chi\frac{\mathrm{ch}(\chi/2)\ln[\pi\varepsilon_l A_l(\chi)/2]}{\mathrm{ch}\chi-\mathrm{ch}\chi'},$$

где мы учли, что

$$\mathrm{Re}\ln\hat{V}_l(\mathrm{sh}(\chi'/2)) = \ln[\pi\varepsilon_l A_l(\chi')/2].$$

Отсюда, принимая во внимание выражение (47), получим

$$|Q_l(\mathrm{cth}\chi')/F_l^W(\chi')|^2[\tilde{V}_l^{(-)}(\mathrm{sh}(\chi'/2))]^2 = \quad (51)$$
$$= \frac{\pi}{2}\varepsilon_l A_l(\chi')\prod_{j'=1}^{\sigma_l}\left[\frac{\mathrm{sh}(\chi'/2)-i\sin(\kappa_{tj'}/2)}{\mathrm{sh}(\chi'/2)+i\sin(\kappa_{tj'}/2)}\right]\times$$
$$\times\prod_{j=1}^{n_l}\left[\frac{\mathrm{sh}(\chi'/2)+i\sin(\kappa_j/2)}{\mathrm{sh}(\chi'/2)-i\sin(\kappa_j/2)}\right]\times$$
$$\times\exp\left[\frac{2\mathrm{sh}(\chi'/2)}{i\pi}\mathrm{P}\int\limits_0^\infty d\chi\frac{\mathrm{ch}(\chi/2)\ln[\pi\varepsilon_l A_l(\chi)/2]}{\mathrm{ch}\chi-\mathrm{ch}\chi'}\right].$$

Наконец, учитывая соотношения (48) и (49), находим

$$|Q_l(\mathrm{cth}\chi')/F_l^W(\chi')|\tilde{V}_l(\chi') = \sqrt{\pi\varepsilon_l A_l(\chi')/2}\times \quad (52)$$
$$\times\exp\left\{-i\,\mathrm{sgn}\chi'\left[\sum_{j'=1}^{\sigma_l}\mathrm{arctg}\frac{\sin(\kappa_{tj'}/2)}{\mathrm{sh}(\chi'/2)}-\right.\right.$$
$$-\sum_{j=1}^{n_l}\mathrm{arctg}\frac{\sin(\kappa_j/2)}{\mathrm{sh}(\chi'/2)}+\frac{\mathrm{sh}(\chi'/2)}{\pi}\times$$
$$\left.\left.\times\mathrm{P}\int\limits_0^\infty d\chi\frac{\mathrm{ch}(\chi/2)\ln[\pi\varepsilon_l A_l(\chi)/2]}{\mathrm{ch}\chi-\mathrm{ch}\chi'}\right]\right\}.$$

Таким образом, в рассмотренном здесь случае решение релятивистской обратной задачи существует и однозначно определяется приращением фазового сдвига и энергиями связанных состояний локального и полного квазипотенциалов. При этом частный случай, когда $\sigma_l = n_l - 1$, $n_l \neq 0$, а $\nu_l = 0$, как и в нерелятивистском случае [6], должен быть исключен, поскольку решение (34) уже не является более регулярным при $x = 1$.

В заключение подчеркнем, что разработанный здесь метод восстановления нелокальной сепарабельной составляющей полного взаимодействия двух релятивистских бесспиновых частиц неравных масс фактически эквивалентен одночастичной релятивистской обратной задаче. Последнее связано с тем, что в рамках релятивистского квазипотенциального подхода к квантовой теории поля полную энергию двух релятивистских бесспиновых частиц неравных масс в с.ц.и. можно представить в виде выражения, пропорционального энергии одной эффективной релятивистской частицы массы m' [14].

Автор выражает глубокую и искреннюю благодарность В.В. Андрееву, Ю.С. Вернову, А.М. Широкову, И.Л. Соловцову, В.Н. Капшаю и Я. Шнир за интерес к работе, ценные замечания и полезное обсуждение полученных результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. И. М. Гельфанд, Б. М. Левитан, Докл. АН СССР **77**, 557 (1951); Изв. АН СССР, Сер. мат. **15**, 309 (1951).
2. В. А. Марченко, Докл. АН СССР **104**, 695 (1955).
3. М. Г. Крейн, Докл. АН СССР **76**, 21, 345 (1951).
4. К. Шадан, П. Сабатье, *Обратные задачи в квантовой теории рассеяния* (Мир, Москва, 1980).
5. Б. Н. Захарьев, А. А. Сузько, *Потенциалы и квантовое рассеяние: прямая и обратная задачи* (Энергоатомиздат, Москва, 1985).
6. K. Chadan, Nuovo Cimento **10**, 892 (1958).
7. M. Bolsterli and J. MacKenzie, Physics **2**, 141 (1965).
8. F. Tabakin, Phys. Rev. **177**, 1443 (1969).
9. R. L. Mills and J. F. Reading, J. Math. Phys. (N.Y.) **10**, 321 (1969).
10. A. A. Logunov and A. N. Tavkhelidze, Nuovo Cimento **29**, 380 (1963).
11. V. G. Kadyshevsky, Nucl. Phys. B **6**, 125 (1968).
12. Ю. Д. Черниченко, ЯФ **67**, 433 (2004).
13. Ю. Д. Черниченко, ЯФ **63**, 2068 (2000).
14. В. Г. Кадышевский, М. Д. Матеев, Р. М. Мир-Касимов, ЯФ **11**, 692 (1970).

RELATIVISTIC INVERSE PROBLEM FOR THE SUPERPOSITION OF A NONLOCAL SEPARABLE AND A LOCAL QUASIPOTENTIALS

Yu. D. Chernichenko

Within the relativistic quasipotential approach to quantum field theory, a relativistic inverse problem is considered for the superposition of a nonlocal separable quasipotential and a local one that simulates the interaction between two relativistic spinless particles of unequal masses. The local component of total interaction is supposed to be known and admitting bound states. It has been shown that a nonlocal separable component of total interaction can be reconstructed if the local part, the additional phase shift and the bound states binding energies are knows.