ЯДЕРНАЯ ФИЗИКА, 2004, том 67, № 2, с. 433–442

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ЧАСТИЦЫ И ПОЛЯ

РЕШЕНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКОГО КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ СУПЕРПОЗИЦИИ НЕЛОКАЛЬНОГО СЕПАРАБЕЛЬНОГО И ЛОКАЛЬНОГО КВАЗИПОТЕНЦИАЛОВ

© 2004 г. Ю. Д. Черниченко

Гомельский государственный технический университет, Белоруссия

Поступила в редакцию 03.10.2002 г.; после доработки 12.02.2003 г.

В рамках релятивистского квазипотенциального подхода к квантовой теории поля разработан метод решения конечно-разностного квазипотенциального уравнения для случая, когда полный квазипотенциал, описывающий взаимодействие двух релятивистских бесспиновых частиц неравных масс, представляет собой суперпозицию нелокального сепарабельного и локального квазипотенциалов. При этом исследуются случаи, когда локальная составляющая полного взаимодействия, предполагающаяся известной, может как допускать связанные состояния, так и не допускать их существование. Это позволило получить точное выражение для приращения фазового сдвига, определить условия существования связанных состояний и дать обобщение теоремы Левинсона.

1. ВВЕДЕНИЕ

Основное преимущество нелокальных сепарабельных взаимодействий связано с тем, что парциальная t-матрица для таких взаимодействий имеет очень простую форму, что позволяет непосредственно продолжить ее на внеэнергетическую поверхность. Именно это свойство особенно важно в ядерной физике и в проблеме многих тел, в частности при решении уравнений Фаддеева в задаче трех тел. Кроме того, применение нелокальных сепарабельных взаимодействий при решении нерелятивистского двухчастичного уравнения Шредингера дает возможность для большого класса таких потенциалов получать замкнутые выражения. Этот же подход оказался эффективным и при решении нерелятивистской обратной задачи [1–4]. Однако такой подход не может быть использован для существенно релятивистских систем [5, 6]. Так, для систем, образованных легкими кварками, вклад релятивистских поправок к гамильтониану взаимодействия оказывается сравнимым с основным нерелятивистским членом. Необходимость релятивистского подхода также возникает и при изучении радиационных распадов мезонов и нуклонных резонансов, когда энергия излучаемого фотона сравнима или больше массы составляющих их кварков.

Одним из эффективных методов релятивистского описания двухчастичных систем [7–10] до сих пор является квазипотенциальный подход [11]. В настоящей работе в рамках релятивистского квазипотенциального подхода к квантовой теории поля [12] рассматривается решение конечно-разностного квазипотенциального уравнения для суперпозиции нелокального сепарабельного и локального квазипотенциалов, описывающих взаимодействие двух релятивистских бесспиновых частиц с неравными массами ($m_1 \neq m_2$). Необходимость такого представления взаимодействия двухчастичной системы вызвана, в частности, предположением мезонной теории ядерных сил. В соответствии с этой теорией взаимодействие между двумя нуклонами является локальным на больших расстояниях, но становится нелокальным и сингулярным на малых расстояниях. При этом мы можем считать, что локальная часть $w(\rho)$ полного взаимодействия является известной и согласуется с экспериментальными данными при низких энергиях. Поскольку точная теоретическая информация о ядерных силах на малых расстояниях отсутствует, то мы можем исходя из требования простоты предполагать, что на этих расстояниях нелокальная составляющая полного взаимодействия является сепарабельной. Поэтому, ограничиваясь случаем центрально-симметричных сил и одним сепарабельным членом, выберем полное взаимодействие в виде

$$V(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}';E_{q'}) \equiv V(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}') = w(\rho)\delta(\boldsymbol{\rho}'-\boldsymbol{\rho}) + \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\varepsilon_l v_l(\rho)v_l(\rho')P_l\left(\frac{\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho}'}{\rho\rho'}\right). \quad (1)$$

Здесь $P_l(z)$ — функция Лежандра первого рода, $\boldsymbol{\rho} = \rho\mathbf{n}$, $\boldsymbol{\rho}' = \rho'\mathbf{n}'$, $|\mathbf{n}|, |\mathbf{n}'| = 1$, $\varepsilon_l = \pm 1$[1]. Тогда

[1] Заметим, что значение $\varepsilon_l = -1$ соответствует притягивающему взаимодействию, а значение $\varepsilon_l = 1$ — отталкивающему взаимодействию.

релятивистский аналог дифференциального уравнения Шредингера для волновой функции $\Psi_{q'}(\boldsymbol{\rho})$ в конфигурационном представлении с взаимодействием (1) в случае неравных масс запишется в форме[2)]

$$\frac{m'^2}{\mu}\left[\operatorname{ch}\left(i\lambda'\frac{\partial}{\partial\rho}\right)+\frac{i\lambda'}{\rho}\operatorname{sh}\left(i\lambda'\frac{\partial}{\partial\rho}\right)-\right. \tag{2}$$
$$\left.-\frac{\lambda'^2}{2\rho^2}\Delta_{\theta,\varphi}\exp\left(i\lambda'\frac{\partial}{\partial\rho}\right)-\operatorname{ch}\chi'\right]\Psi_{q'}(\boldsymbol{\rho})+$$
$$+\int d\boldsymbol{\rho}'V(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}')\Psi_{q'}(\boldsymbol{\rho}')=0,$$

где $\Delta_{\theta,\varphi}$ — угловая часть оператора Лапласа, $\lambda' = 1/m'$ — комптоновская длина волны эффективной релятивистской частицы массы $m' = \sqrt{m_1m_2}$, а $\mu = m'^2/(m_1+m_2)$ [3)].

Следуя работе [14], разложим функцию $\Psi_{q'}(\boldsymbol{\rho})$ по парциальным волнам:

$$\Psi_{q'}(\boldsymbol{\rho})=\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)i^l\frac{\psi_l(\rho,\chi')}{\rho}P_l\left(\frac{\mathbf{q}'\cdot\boldsymbol{\rho}}{q'\rho}\right), \tag{3}$$
$$q'=|\mathbf{q}'|.$$

Тогда уравнение (2) приводится к виду

$$\left[\nabla+\left(1+\frac{l(l+1)}{r^{(2)}}\right)\nabla^*-2\operatorname{ch}\chi'+W(r)\right]\times \tag{4}$$
$$\times\,\psi_l(r,\chi')+\varepsilon_lV_l(r)\int_0^{\infty}dr'V_l(r')\psi_l(r',\chi')=0.$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\nabla=\exp\left(-i\frac{d}{dr}\right),\quad \nabla^*=\exp\left(i\frac{d}{dr}\right),$$
$$V_l(r)=\sqrt{8\pi\lambda'\mu/m'^2}\,\rho v_l(\rho),$$
$$W(r)=2\mu w(\rho)/m'^2,\quad r^{(2)}=r(r+i),$$
$$\rho=\lambda'r,\quad \rho'=\lambda'r'.$$

[2)]Здесь и далее мы используем систему единиц, в которой $\hbar=c=1$.

[3)]Напомним, что в рамках рассматриваемого варианта релятивистского квазипотенциального подхода к квантовой теории поля для случая взаимодействия двух релятивистских бесспиновых частиц неравных масс [13] уравнение (2) описывает в с.ц.и. рассеяние эффективной релятивистской частицы массы m' с трехмерным относительным импульсом $\mathbf{q}'$ и полной энергией частиц $\sqrt{S_{q'}}$, пропорциональной в с.ц.и. энергии $E_{q'}=\sqrt{m'^2+\mathbf{q}'^2}=m'\operatorname{ch}\chi'$ одной эффективной релятивистской частицы массы m':
$$\sqrt{S_{q'}}=(m'/\mu)E_{q'}=(m'^2/\mu)\operatorname{ch}\chi',$$
где χ' — быстрота эффективной частицы.

Таким образом, возможность представить полную энергию двух релятивистских бесспиновых частиц неравных масс в с.ц.и. в виде выражения, пропорционального энергии одной эффективной релятивистской частицы массы m', позволяет в рамках данного подхода свести релятивистскую проблему двух тел неравных масс к одночастичной [13]. Решение уравнения (4) с граничным условием

$$\psi_l(0,\chi')=0, \tag{5}$$

получение выражения для приращения фазового сдвига, исследование условий существования связанных состояний и обобщение теоремы Левинсона для суперпозиции нелокального сепарабельного и локального квазипотенциалов и есть цель настоящей работы, обобщающей результаты работы [14]. При этом мы будем считать, что локальная составляющая полного взаимодействия $W(r)$ известна и может как иметь n_l связанных состояний с энергиями

$$0\le E_j=E_{q'j}/m'=\operatorname{ch}\chi_j<1, \tag{6}$$
$$\chi_j=i\kappa_j,\quad 0<\kappa_j\le\frac{\pi}{2},\quad j=1,2,\ldots,n_l,$$

так и не допускать их существование.

2. СВОЙСТВА РЕГУЛЯРНОГО РЕШЕНИЯ И СПЕКТРАЛЬНАЯ ПЛОТНОСТЬ ДЛЯ ЛОКАЛЬНОГО КВАЗИПОТЕНЦИАЛА

Для существования единственного решения уравнения (4) с граничным условием (5) необходимо, чтобы сепарабельный $V_l(r)$ и локальный $W(r)$ квазипотенциалы удовлетворяли условиям

$$rV_l(r)\in L_1(0,\infty),\quad rW(r)\in L_1(0,\infty). \tag{7}$$

Последнее требование в (7) означает, что регулярное решение $\varphi_l(r,\chi')$ и решение Йоста $f_l(r,\chi')$ уравнения

$$\left[\nabla+\left(1+\frac{l(l+1)}{r^{(2)}}\right)\nabla^*-2\operatorname{ch}\chi'+W(r)\right]\times \tag{8}$$
$$\times\begin{Bmatrix}\varphi_l(r,\chi')\\ f_l(r,\chi')\end{Bmatrix}=0$$

с граничным условием

$$\varphi_l(0,\chi')=0 \tag{9}$$

обладают следующими необходимыми свойствами.

Введем, используя поведение свободных решений $s_l(r,\chi')$ и $e_l^{(1)}(r,\chi')$ уравнения (8) при выключенном взаимодействии ($W(r) \equiv 0$)[4], релятивистские регулярное решение $\varphi_l(r,\chi')$, удовлетворяющее граничному условию (9), и решение Йоста $f_l(r,\chi')$ уравнения (8), полагая[5]

$$\lim_{r\to 0} \frac{e^{-i\pi(l+1)}\Gamma(l+1)}{(-r)^{(l+1)}}\varphi_l(r,\chi') = 1, \tag{10}$$

$$\lim_{r\chi'\to\infty} e^{-i(r\chi'-\pi l/2)} f_l(r,\chi') = 1. \tag{11}$$

Здесь $\Gamma(z)$ — гамма-функция, $Q_l(z)$ — функция Лежандра второго рода, а $(-r)^{(\lambda)}$ есть обобщенная степень:

$$(-r)^{(\lambda)} = i^\lambda \Gamma(ir+\lambda)/\Gamma(ir). \tag{12}$$

Легко проверить, что для комплексных χ' и действительных r и l регулярное решение и решение Йоста обладают свойствами "симметрии":

$$\varphi_l(r,-\chi') = \varphi_l(r,\chi'), \tag{13}$$

$$[\varphi_l(r,\chi')]^* = \nu_l(r)\varphi_l(r,\chi'^*), \tag{14}$$

$$[f_l(r,\chi')]^* = e^{i\pi l}\nu_l(r) f_l(r,-\chi'^*), \tag{15}$$

где

$$\nu_l(r) = e^{i\pi(l+1)}(r)^{(l+1)}/(-r)^{(l+1)}. \tag{16}$$

Можно показать, что при $\operatorname{sh}\chi' \neq 0$ два решения Йоста $f_l(r,\pm\chi')$ линейно независимы, так как их вронскиан,

$$W_\Delta[f_l(r,\chi'), f_l(r,-\chi')] = \tag{17}$$
$$= \begin{vmatrix} f_l(r,\chi') & f_l(r,-\chi') \\ \Delta f_l(r,\chi') & \Delta f_l(r,-\chi') \end{vmatrix} = 2ie^{i\pi(l+1)}\frac{\operatorname{sh}\chi'}{\nu_l(r)},$$

отличен от нуля[6]. Следовательно, регулярное решение $\varphi_l(r,\chi')$ можно представить в виде линейной комбинации этих двух решений Йоста с постоянными (не зависящими от r) коэффициентами:

$$\varphi_l(r,\chi') = (1/2iQ_l(\operatorname{cth}\chi')) \times \tag{18}$$
$$\times [F_l^W(-\chi')f_l(r,\chi') + e^{i\pi(l+1)}F_l^W(\chi')f_l(r,-\chi')].$$

Функция $F_l^W(\chi')$, которую можно представить, используя значение вронскиана (17), в виде

$$F_l^W(\chi') = (Q_l(\operatorname{cth}\chi')/\operatorname{sh}\chi') \times \tag{19}$$
$$\times \nu_l(r) W_\Delta[f_l(r,\chi'), \varphi_l(r,\chi')],$$

является функцией Йоста для локального квазипотенциала $W(r)$ и связана с соответствующим ей фазовым сдвигом $\delta_l^W(\chi')$ соотношением

$$F_l^W(\chi') = |F_l^W(\chi')| \exp[-i\delta_l^W(\chi')]. \tag{20}$$

Из соотношений (14), (15), (18) и (20) следуют свойства "симметрии":

$$[F_l^W(\chi')]^* = F_l^W(-\chi'^*), \tag{21}$$

$$[\delta_l^W(\chi')]^* = \delta_l^W(\chi'^*), \tag{22}$$

$$\delta_l^W(-\chi') = -\delta_l^W(\chi'). \tag{23}$$

Кроме того, из представления (19) и поведения (10) регулярного решения $\varphi_l(r,\chi')$ вблизи точки $r = 0$ устанавливаем, что решение и функция Йоста связаны предельным соотношением

$$F_l^W(\chi') = \lim_{r\to 0}\frac{e^{-i\pi l}(2l+1)Q_l(\operatorname{cth}\chi')}{\Gamma(l+1)\operatorname{sh}\chi'(-r)^{(-l)}} f_l(r,\chi'). \tag{24}$$

Далее, используя асимптотику (11), из представления (18) находим

$$\varphi_l(r,\chi') = \frac{|F_l^W(\chi')|}{Q_l(\operatorname{cth}\chi')} \times \tag{25}$$
$$\times \sin\left[r\chi' - \frac{\pi l}{2} + \delta_l^W(\chi')\right], \quad r\chi' \to \infty.$$

Теперь установим свойство ортогональности двух регулярных решений уравнения (8) при двух значениях быстроты χ и χ'^*. С этой целью умножим уравнение (8) для функций $\varphi_l(r,\chi'^*)$ и $\varphi_l(r,\chi)$ соответственно на функции $\varphi_l(r,\chi)$ и $\varphi_l(r,\chi'^*)$, а затем вычтем полученные результаты. Тогда, учитывая свойство сопряжения (14) для регулярного решения, получим[7]

$$2(\operatorname{ch}\chi - \operatorname{ch}\chi'^*)\varphi_l(r,\chi)\varphi_l^*(r,\chi') =$$
$$= \Delta^*\{\nu_l(r) W_\Delta[\varphi_l(r,\chi), \varphi_l(r,\chi'^*)]\}.$$

Отсюда находим

$$\int_0^\infty dr\varphi_l(r,\chi)\varphi_l^*(r,\chi') = \sum_{n=1}^\infty \frac{i^{n-1}}{n!2(\operatorname{ch}\chi - \operatorname{ch}\chi'^*)} \times$$

[4]Напомним, что поведение свободных решений $s_l(r,\chi')$ и $e_l^{(1)}(r,\chi')$ в принятых здесь обозначениях имеет вид [15]:

$$s_l(r,\chi') \approx e^{i\pi(l+1)}(-r)^{(l+1)}Q_l(\operatorname{cth}\chi')/\Gamma(l+1), r\to 0,$$
$$e_l^{(1)}(r,\chi') \approx e^{i(r\chi'-\pi l/2)}, r\chi' \to \infty.$$

[5]Такой выбор граничного условия для решения Йоста в форме (11) означает, что всюду в дальнейшем $\operatorname{Im}\chi' \geq 0$.

[6]Здесь $\Delta = (\nabla - 1)/(-i)$ есть оператор конечно-разностного дифференцирования. Напомним, что в обычных единицах он имеет вид [16, 17]

$$\Delta = (\nabla - 1)/(-i\lambda') = [\exp(-i\lambda' d/d\rho) - 1]/(-i\lambda'),$$
$$\lambda' = \hbar/m'c.$$

[7]Здесь $\Delta^* = (\nabla^* - 1)/i = [\exp(id/dr) - 1]/i$ есть сопряженный оператор конечно-разностного дифференцирования в принятых обозначениях.

$$\times \frac{d^{n-1}}{dr^{n-1}}\left\{\nu_l(r)W_\Delta[\varphi_l(r,\chi),\varphi_l(r,\chi'^*)]\right\}\Big|_0^\infty. \quad (26)$$

Наконец, выполнив в (26) вычисления с использованием соотношений (10), (11), (24) и (25) и принимая во внимание, что локальный квазипотенциал $W(r)$ имеет n_l связанных состояний с энергиями (6), приходим к условию ортогональности [8)]

$$\int_0^\infty dr\varphi_l(r,\chi)\varphi_l^*(r,\chi') = \quad (27)$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\delta(E-E')}{d\rho_l(E)/dE}, \ E=\operatorname{ch}\chi\geq 1, \ E'=\operatorname{ch}\chi'\geq 1; \\ C_{lj}^{-1}\delta_{jj'}, \quad 0\leq E_j=\operatorname{ch}\chi_j<1, \\ 0\leq E_{j'}=\operatorname{ch}\chi_{j'}<1; \\ \chi=\chi_j=i\kappa_j, \quad \chi'=\chi_{j'}=i\kappa_{j'}, \quad 0<\kappa_j, \\ \kappa_{j'}\leq\pi/2, \quad j,j'=1,2,\ldots,n_l; \\ 0, \quad E=\operatorname{ch}\chi\geq 1, \quad 0\leq E_{j'}=\operatorname{ch}\chi_{j'}<1, \\ \chi'=\chi_{j'}=i\kappa_{j'}, \quad 0<\kappa_{j'}\leq\pi/2. \end{cases}$$

Здесь

$$C_{lj}^{-1} = \int_0^\infty dr\varphi_l(r,\chi_j)\varphi_l^*(r,\chi_j) =$$
$$= -F_l^W(-\chi_j)\dot{F}_l^W(\chi_j)/[4iQ_l^2(\operatorname{cth}\chi_j)], \quad (28)$$
$$\dot{F}_l^W(\chi_j)=dF_l^W(\chi_j)/d\chi_j, \quad j=1,2,\ldots,n_l,$$

суть нормировочные константы, а спектральная плотность в этом случае дается выражением

$$\frac{d\rho_l(E)}{dE} = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\operatorname{sh}^{-1}\chi Q_l^2(\operatorname{cth}\chi)|F_l^W(\chi)|^{-2}, \\ E=\operatorname{ch}\chi\geq 1; \\ \sum\limits_{j=1}^{n_l} C_{lj}\delta(E-E_j), \ 0\leq E=\cos\kappa<1, \\ 0\leq E_j=\operatorname{ch}\chi_j<1, \quad \chi_j=i\kappa_j, \\ 0<\kappa, \quad \kappa_j\leq\pi/2. \end{cases} \quad (29)$$

С другой стороны, мы имеем свойство полноты [9)]

$$\int_0^\infty d\rho_l(E)\varphi_l(r,\chi)\varphi_l^*(r',\chi) = \quad (30)$$
$$= \sum_{j=1}^{n_l} C_{lj}\varphi_l(r,\chi_j)\varphi_l^*(r',\chi_j) +$$
$$+ \int_0^\infty d\chi\tau_l(\chi)\varphi_l(r,\chi)\varphi_l^*(r',\chi) = \delta(r'-r),$$

где $\tau_l(\chi)=\dfrac{2}{\pi}Q_l^2(\operatorname{cth}\chi)|F_l^W(\chi)|^{-2}$.

3. ВОЛНОВАЯ ФУНКЦИЯ И ФАЗОВЫЙ СДВИГ ДЛЯ СУПЕРПОЗИЦИИ НЕЛОКАЛЬНОГО СЕПАРАБЕЛЬНОГО И ЛОКАЛЬНОГО КВАЗИПОТЕНЦИАЛОВ

Свойства ортогональности (27) и полноты (30) позволяют нам ввести релятивистские интегральные преобразования [10)]:

$$\widetilde{\psi}_l(\chi',\chi) = \int_0^\infty dr\psi_l(r,\chi')\varphi_l^*(r,\chi), \quad (31)$$

$$\psi_l(r,\chi') = \int_0^\infty d\rho_l(E)\widetilde{\psi}_l(\chi',\chi)\varphi_l(r,\chi) =$$
$$= \sum_{j=1}^{n_l} C_{lj}\widetilde{\psi}_l(\chi',\chi_j)\varphi_l(r,\chi_j) + \quad (32)$$
$$+ \int_0^\infty d\chi\tau_l(\chi)\widetilde{\psi}_l(\chi',\chi)\varphi_l(r,\chi),$$

$$\widetilde{V}_l(\chi) = \int_0^\infty drV_l(r)\varphi_l^*(r,\chi), \quad (33)$$

[8)]Легко показать, что всякий нуль χ_j функции Йоста при $\operatorname{Im}\chi_j>0$ соответствует связанному состоянию. Действительно, если $F_l^W(\chi_j)=0$, то из представления (18) имеем

$$\varphi_l(r,\chi_j)=F_l^W(-\chi_j)f_l(r,\chi_j)/2iQ_l(\operatorname{cth}\chi_j).$$

Тогда в силу условия (11) функция $\varphi_l(r,\chi_j)$ убывает экспоненциально при $r\to\infty$, $\operatorname{Im}\chi_j>0$, а значит, мы имеем связанное состояние с энергией $E_j=\operatorname{ch}\chi_j$. Причем все нули функции Йоста простые и чисто мнимые, поскольку $4\operatorname{sh}(\operatorname{Re}\chi_j)\sin(\operatorname{Im}\chi_j)\int_0^\infty dr|f_l(r,\chi_j)|^2=0$ при $\operatorname{Re}\chi_j=0$, $\operatorname{Im}\chi_j>0$.

[9)]Отметим, что при отсутствии взаимодействия условия (27) и (30) переходят в обычные условия ортогональности и полноты для свободных решений $s_l(r,\chi)$ [17]:

$$(2/\pi)\int_0^\infty drs_l(r,\chi)s_l^*(r,\chi')=\delta(\chi'-\chi),$$
$$(2/\pi)\int_0^\infty d\chi s_l(r,\chi)s_l^*(r',\chi)=\delta(r'-r).$$

[10)]Заметим, что интегральные преобразования (31)–(34) при отсутствии локального взаимодействия ($W(r)\equiv 0$) сводятся к релятивистским интегральным преобразованиям Ханкеля, введенным в работе [14].

$$V_l(r) = \int_0^\infty d\rho_l(E)\widetilde{V}_l(\chi)\varphi_l(r,\chi) = \tag{34}$$

$$= \sum_{j=1}^{n_l} C_{lj}\widetilde{V}_l(\chi_j)\varphi_l(r,\chi_j) + \int_0^\infty d\chi\tau_l(\chi)\widetilde{V}_l(\chi)\varphi_l(r,\chi).$$

Применяя преобразования (32) и (34) к уравнению (4), получим

$$(\operatorname{ch}\chi' - \operatorname{ch}\chi_j)\widetilde{\psi}_l(\chi',\chi_j) = \frac{1}{2}\varepsilon_l N_l(\chi')\widetilde{V}_l(\chi_j), \tag{35}$$

$$(\operatorname{ch}\chi' - \operatorname{ch}\chi)\widetilde{\psi}_l(\chi',\chi) = \frac{1}{2}\varepsilon_l N_l(\chi')\widetilde{V}_l(\chi), \tag{36}$$

$$N_l(\chi') = \int_0^\infty d\rho_l(E)\widetilde{\psi}_l(\chi',\chi)\widetilde{U}_l(\chi), \tag{37}$$

где мы положили

$$V_l(r) = \nu_l(r)U_l(r), \tag{38}$$

причем для функции $U_l(r)$ также справедливы интегральные преобразования:

$$\widetilde{U}_l(\chi) = \int_0^\infty dr U_l(r)\varphi_l^*(r,\chi), \tag{39}$$

$$U_l(r) = \int_0^\infty d\rho_l(E)\widetilde{U}_l(\chi)\varphi_l(r,\chi). \tag{40}$$

Заметим, что условия (7) обеспечивают выполнение свойств (10) и (25). Значит, функция $\widetilde{V}_l(\chi)$ всюду непрерывна, а функция $Q_l(\operatorname{cth}\chi)\widetilde{V}_l(\chi) \times |F_l^W(\chi)|^{-1}$ дифференцируема при всех $\chi \geq 0$. Более того, из (33) следуют оценки

$$Q_l(\operatorname{cth}\chi)\widetilde{V}_l(\chi)|F_l^W(\chi)|^{-1} = O(1), \quad |\chi| \to \infty, \tag{41}$$

$$\widetilde{V}_l(\chi) = O(1), \quad \chi \to 0, \tag{42}$$

если только условия (7) выполняются. Очевидно, что отмеченные выше оценки в силу (38) и (39) имеют место также и для функции $\widetilde{U}_l(\chi)$. Кроме того, для действительных l преобразование (40) можно представить, используя свойства (13), (14) и определение (38), в виде

$$V_l(r) = \int_0^\infty d\rho_l(E)\widetilde{U}_l(\chi)\varphi_l^*(r,\chi) =$$

$$= \int_0^\infty d\rho_l(E)\widetilde{V}_l(\chi)\varphi_l(r,\chi).$$

Отсюда, учитывая действительность сепарабельного члена $V_l(r)$, следует

$$\widetilde{U}_l(\chi) = \widetilde{V}_l^*(\chi). \tag{43}$$

Для состояний рассеяния решения уравнений (35) и (36) имеют вид [11]:

$$\widetilde{\psi}_l(\chi',\chi_j) = \frac{1}{2}\varepsilon_l N_l(\chi')\frac{\widetilde{V}_l(\chi_j)}{\operatorname{ch}\chi' - \operatorname{ch}\chi_j}, \tag{44}$$

$$\widetilde{\psi}_l(\chi',\chi) = \frac{\delta(\operatorname{ch}\chi' - \operatorname{ch}\chi)}{d\rho_l(\operatorname{ch}\chi')/d(\operatorname{ch}\chi')} + \frac{1}{2}\varepsilon_l N_l(\chi')\mathrm{P}\frac{\widetilde{V}_l(\chi)}{\operatorname{ch}\chi' - \operatorname{ch}\chi}, \tag{45}$$

$$E' = \operatorname{ch}\chi' \geq 1.$$

Подставляя решения (44) и (45) в (32) и (37) и учитывая свойство (43), получим

$$\psi_l(r,\chi') = \varphi_l(r,\chi') + \frac{1}{2}\varepsilon_l N_l(\chi')\sum_{j=1}^{n_l} C_{lj}\frac{\widetilde{V}_l(\chi_j)\varphi_l(r,\chi_j)}{\operatorname{ch}\chi' - \operatorname{ch}\chi_j} + \frac{1}{2}\varepsilon_l N_l(\chi')\mathrm{P}\int_0^\infty d\chi\frac{\tau_l(\chi)\widetilde{V}_l(\chi)\varphi_l(r,\chi)}{\operatorname{ch}\chi' - \operatorname{ch}\chi}, \tag{46}$$

$$N_l(\chi') = \varepsilon_l\widetilde{V}_l^*(\chi')/\Phi_l(\operatorname{ch}\chi'), \tag{47}$$

где

$$\Phi_l(\operatorname{ch}\chi') = \varepsilon_l - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n_l} C_{lj}\frac{|\widetilde{V}_l(\chi_j)|^2}{\operatorname{ch}\chi' - \operatorname{ch}\chi_j} - \frac{1}{2}\varepsilon_l\mathrm{P}\int_0^\infty d\chi\frac{A_l(\chi)}{\operatorname{ch}\chi' - \operatorname{ch}\chi}, \tag{48}$$

$$A_l(\chi) = \varepsilon_l\tau_l(\chi)|\widetilde{V}_l(\chi)|^2. \tag{49}$$

Причем главные значения интегралов в (46) и (48) существуют, так как функция $\widetilde{V}_l(\chi)$ дифференцируема, а в силу условий (41) и (42) они также сходятся и на обоих пределах. Таким образом, в случае, когда локальный квазипотенциал $W(r)$ имеет n_l связанных состояний, соотношения (46)–(49) дают единственное решение уравнения (4) с граничным условием (5), если только условия (7) выполняются. Если же локальный квазипотенциал $W(r)$ не

[11] В выражении (45) P есть символ главного значения, а множитель при δ-функции выбран в соответствии с нормировкой волновой функции: при отсутствии сепарабельного взаимодействия ($\varepsilon_l = 0$) представление (32) должно приводить к регулярному решению $\varphi_l(r,\chi')$ с локальным квазипотенциалом $W(r)$.

допускает существование связанных состояний, то в соотношениях (46) и (48) необходимо положить $C_{lj} \equiv 0$.

Теперь воспользуемся представлением (18) и запишем решение (46) в виде

$$\psi_l(r,\chi') = \varphi_l(r,\chi') + \frac{1}{2}\varepsilon_l N_l(\chi') \sum_{j=1}^{n_l} C_{lj} \frac{\widetilde{V}_l(\chi_j)\varphi_l(r,\chi_j)}{\operatorname{ch}\chi' - \operatorname{ch}\chi_j} + \varepsilon_l N_l(\chi') \mathrm{P}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\chi \frac{Q_l(\operatorname{cth}\chi)\widetilde{V}_l(\chi) f_l(r,\chi)}{F_l^W(\chi)(\operatorname{ch}\chi' - \operatorname{ch}\chi)}. \tag{50}$$

Главное значение интеграла в решении (50) легко вычисляется при $r \to \infty$, если использовать асимптотику (11) и соотношение

$$\frac{1}{\alpha - i\eta} = i\pi\delta(\alpha) + \mathrm{P}\left(\frac{1}{\alpha}\right), \quad \eta \to +0,$$

а затем применить теорему вычетов при интегрировании по границе области $0 \le \operatorname{Im}\chi \le \pi/2$:

$$\mathrm{P}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\chi \frac{Q_l(\operatorname{cth}\chi)\widetilde{V}_l(\chi) f_l(r,\chi)}{F_l^W(\chi)(\operatorname{ch}\chi' - \operatorname{ch}\chi)} = -\frac{Q_l(\operatorname{cth}\chi')\widetilde{V}_l(\chi')}{|F_l^W(\chi')|\operatorname{sh}\chi'}\cos\left[r\chi' - \frac{\pi l}{2} + \delta_l^W(\chi')\right] - \sum_{j=1}^{n_l} \frac{Q_l(\operatorname{cth}\chi_j)\widetilde{V}_l(\chi_j)\exp[i(r\chi_j - \pi l/2)]}{\dot{F}_l^W(\chi_j)(\operatorname{ch}\chi_j - \operatorname{ch}\chi')} + O(e^{-\pi r/4}), \quad \eta \to +0.$$

Тогда асимптотика волновой функции (50), учитывая последний результат и соотношение (25), а также принимая во внимание поведение функции $\varphi_l(r,\chi_j)$, отмеченное в подстрочном примечании 8, дается выражением

$$\psi_l(r,\chi') = \frac{|F_l^W(\chi')|}{Q_l(\operatorname{cth}\chi')}\sin\left[r\chi' - \frac{\pi l}{2} + \delta_l^W(\chi')\right] - \frac{\varepsilon_l N_l(\chi') Q_l(\operatorname{cth}\chi')\widetilde{V}_l(\chi')}{|F_l^W(\chi')|\operatorname{sh}\chi'} \times \cos\left[r\chi' - \frac{\pi l}{2} + \delta_l^W(\chi')\right] + O(e^{-\pi r/4}), \quad r\chi' \to \infty. \tag{51}$$

Наконец, выбрав асимптотику волновой функции $\psi_l(r,\chi')$ в форме [12]

$$\psi_l(r,\chi') = \frac{|F_l^W(\chi')|}{Q_l(\operatorname{cth}\chi')}\sin\left[r\chi' - \frac{\pi l}{2} + \delta_l^W(\chi')\right] + \frac{|F_l^W(\chi')|}{Q_l(\operatorname{cth}\chi')}\operatorname{tg}\delta_l^V(\chi')\cos\left[r\chi' - \frac{\pi l}{2} + \delta_l^W(\chi')\right], \quad r\chi' \to \infty$$

и сравнив это представление с асимптотикой (51), получим для приращения фазового сдвига выражение

$$\operatorname{tg}\delta_l^V(\chi') = -\frac{\pi}{2}\operatorname{sh}^{-1}\chi' \frac{\varepsilon_l A_l(\chi')}{\Phi_l(\operatorname{ch}\chi')}. \tag{52}$$

4. СВЯЗАННЫЕ СОСТОЯНИЯ И ОБОБЩЕННАЯ ТЕОРЕМА ЛЕВИНСОНА

Пусть существует хотя бы одно связанное состояние с энергией $E' = \operatorname{ch}\chi' \ge 0$. Тогда решения уравнений (35) и (36) даются выражениями

$$\widetilde{\psi}_l(\chi',\chi_j) = \frac{1}{2}\varepsilon_l N_l(\chi') \frac{\widetilde{V}_l(\chi_j)}{\operatorname{ch}\chi' - \operatorname{ch}\chi_j}, \tag{53}$$

$$\widetilde{\psi}_l(\chi',\chi) = \frac{1}{2}\varepsilon_l N_l(\chi') \mathrm{P}\frac{\widetilde{V}_l(\chi)}{\operatorname{ch}\chi' - \operatorname{ch}\chi}. \tag{54}$$

Здесь предполагается, что все $\widetilde{V}_l(\chi_j) \ne 0$ и $\widetilde{V}_l(\chi) \ne 0$. Случаи, когда одно или несколько $\widetilde{V}_l(\chi_j) = 0$, или $\widetilde{V}_l(\chi) = 0$, будут рассмотрены ниже. Подстановка решений (53) и (54) в равенство (37) приводит к уравнению на собственные значения

$$\Phi_l(E') = \varepsilon_l - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n_l} C_{lj}\frac{|\widetilde{V}_l(\chi_j)|^2}{E' - E_j} - \frac{1}{2}\varepsilon_l \mathrm{P}\int\limits_0^{\infty} d\chi \frac{A_l(\chi)}{E' - \operatorname{ch}\chi} = 0, \tag{55}$$

которое имеет решения $E' \ge 0$ при $\varepsilon_l = \pm 1$. При этом значениям энергий

$$0 \le E' = E_{tj'} = \operatorname{ch}\chi_{tj'} < 1, \quad \chi_{tj'} = i\kappa_{tj'}, \quad 0 < \kappa_{tj'} \le \pi/2, \quad j' = 1, 2, \ldots, \sigma_l, \tag{56}$$

---

[12] Здесь мы представили полный фазовый сдвиг $\delta_l(\chi')$ в виде

$$\delta_l(\chi') = \delta_l^W(\chi') + \delta_l^V(\chi'),$$

где $\delta_l^V(\chi')$ есть приращение фазового сдвига, обусловленное сепарабельной составляющей полного взаимодействия. Заметим, что в данном случае $\delta_l^V(\chi')$ зависит также и от локального квазипотенциала $W(r)$ и, следовательно, его необходимо отличать от фазового сдвига, обусловленного только сепарабельным взаимодействием, т.е. когда локальный квазипотенциал отсутствует [14].

отвечают истинные связанные состояния, обусловленные полным взаимодействием, в то время как энергиям

$$E' = E_{fk} = \operatorname{ch}\chi_{fk} \geq 1, \tag{57}$$

$$k = \begin{cases} 1, 2, \ldots, \nu_l, & \varepsilon_l = -1, \\ 0, 1, \ldots, \nu_l - 1, & \varepsilon_l = +1, \end{cases}$$

соответствуют "поддельные" связанные состояния, обусловленные сепарабельной составляющей полного взаимодействия [1] [13]).

Рассмотрим связанные состояния с энергиями (56). Очевидно, что граничное условие (5) при этом выполняется, а волновая функция асимптотически стремится к нулю при $r \to \infty$. Действительно, подстановка решений (53) и (54) в выражение (32), преобразование интеграла посредством соотношений (18) и (11), а затем интеграция с помощью теоремы вычетов по границе области $0 \leq \operatorname{Im}\chi \leq \pi/2$ дает

$$\psi_l(r, \chi_{tj'}) = O(\exp[-r\min(\pi/4, \kappa_{tj'})]), \quad r \to \infty.$$

Поскольку значения энергий (56) определяются как корни уравнения (55) при $\varepsilon_l = \pm 1$ и $\Phi_l(1) \neq 0$, то для определения их числа σ_l исследуем два случая.

1. Пусть $\varepsilon_l = +1$. Тогда, очевидно, $\Phi_l(E') > 1$ при $E' \leq 0$, что соответствует выбору верхней полы ($E_{q'} \geq 0$) массового гиперболоида $E^2_{q'} - \mathbf{q}'^2 = m'^2$. Причем если $\Phi_l(1) > 0$, то уравнение (55) имеет $\sigma_l = n_l$ корней $E_{tj'}$, что отвечает слабой нелокальности. В противном случае, когда $\Phi_l(1) < 0$, уравнение (55) имеет $\sigma_l = n_l - 1$ корней $E_{tj'}$, что соответствует сильной нелокальности. Также очевидно, что значения $E_{tj'}$ больше соответствующих значений E_j. Тем самым сепарабельное взаимодействие является отталкивающим и в зависимости от его величины может устранить одно связанное состояние, а значение $\Phi_l(1)$ при этом отвечает за величину нелокальности.

2. Пусть теперь $\varepsilon_l = -1$. Тогда уравнение (55) допускает решения (56), если $\Phi_l(0) \leq 0$. Причем при $\Phi_l(1) < 0$ сепарабельная составляющая полного взаимодействия обладает слабой нелокальностью притягивающего типа, что не изменяет числа связанных состояний полного взаимодействия ($\sigma_l = n_l$), а ведет только к уменьшению значений их энергий $E_{tj'}$ по отношению к соответствующим значениям энергий E_j. Если же $\Phi_l(1) > 0$, то сепарабельная составляющая полного взаимодействия теперь обладает сильной нелокальностью притягивающего типа, что ведет не только к уменьшению значений энергий связанных состояний $E_{tj'}$, но и будучи сильным способно привести к образованию еще одного связанного состояния ($\sigma_l = n_l + 1$) с энергией $E_{t(n_l+1)} > E_j > E_{tj'}$ ($j', j = 1, 2, \ldots, n_l$). Тем самым эффективную частицу массы m' в этом случае можно рассматривать как "квазилокальную", а значение $\Phi_l(1)$ при этом также будет отвечать за величину нелокальности.

Теперь рассмотрим случай, когда одно из $\{\widetilde{V}_l(\chi_j)\}$ равно нулю, например $\widetilde{V}_l(\chi_k)$. Тогда функция $\Phi_l(E')$ является непрерывной при $E' = E_k$, а следовательно, одно из значений $\{E_{tj'}\}$ будет отсутствовать. При этом собственное значение, которое отсутствует, например E_{tk}, замещается значением E_k, а собственная функция $\psi_l(r, \chi_{tk})$ совпадает с волновой функцией $\varphi_l(r, \chi_k)$. Это означает, что $V_l(r)$ ортогонально $\varphi_l(r, \chi_k)$, а суперпозиция нелокального сепарабельного взаимодействия $\varepsilon_l V_l(r) V_l(r')$ и локального квазипотенциала $W(r)$ не изменяет волновой функции $\varphi_l(r, \chi_k)$ и ее значения энергии $E_k = \operatorname{ch}\chi_k$. Кроме того, по этой же причине одно из значений $\{E_{tj'}\}$, например $E_{t(k+1)}$, будет равно значению E_k. Тем самым мы имеем вырождение при энергии E_k, а волновую функцию $\psi_l(r, \chi_{t(k+1)})$ можно выбрать ортогональной функции $\varphi_l(r, \chi_k)$, полагая $\widetilde{\psi}_l(\chi_{t(k+1)}, \chi_k) \equiv 0$.

Случай, когда несколько $\widetilde{V}_l(\chi_j)$ равно нулю, рассматривается аналогично. При этом степень вырождения для каждого E_j не может быть больше двух. Но поскольку $d\Phi_l(E')/dE' > 0$ при $0 \leq E' \leq 1$, $E' \neq E_j$, то хотя бы одно из $\{\widetilde{V}_l(\chi_j)\}$ не равно нулю [14]).

[13])Здесь, как и для сепарабельных потенциалов в нерелятивистском случае, "поддельные" связанные состояния представляют собой дискретные уровни, погруженные в непрерывный спектр.

[14])Это не имеет места только при $n_l = 1$ и $\varepsilon_l = -1$. В этом случае уравнение (55) принимает вид

$$\Phi_l(E') = -1 + \frac{1}{2}\mathrm{P}\int\limits_0^\infty d\chi \frac{|A_l(\chi)|}{\operatorname{ch}\chi - E'} = 0,$$

т.е. аналогично случаю, когда локальный квазипотенциал не допускает связанных состояний. Причем это уравнение имеет единственный корень $E' = E_t$, если выполнено условие

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty d\chi |\widetilde{V}_l(\chi)/F_l^W(\chi)|^2 > 1.$$

Последнее же требование связано с тем, что для любых $l, \chi \geq 0$ функция $g_l(\chi)$ является ограниченной:

$$g_l(\chi) = \frac{1}{2}\frac{Q_l^2(\operatorname{cth}\chi)}{\operatorname{ch}\chi - E_t} \leq \max g_l(\chi) \approx$$

$$\approx \frac{\pi(\operatorname{th}\chi_{\max})^{2l}}{4^{l+1}\operatorname{ch}\chi_{\max}}\left[1 - \frac{l+1}{2l+3}\operatorname{th}^2\chi_{\max}\right] < 1.$$

Наконец, предположим, что $\widetilde{V}_l(\chi) \equiv 0$, а следовательно, в силу условия ортогональности (27) и представления (33), имеем

$$V_l(r) = \sum_{j=1}^{n_l} a_j \varphi_l(r, \chi_j).$$

Тогда уравнение (55) принимает вид

$$\Phi_l(E') = \varepsilon_l - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n_l} C_{lj}\frac{|\widetilde{V}_l(\chi_j)|^2}{E' - E_j} = 0. \tag{58}$$

Однако в этом случае уравнение (58) не может иметь более чем n_l корней $E_{tj'}$, поскольку $\Phi_l(0) > > \varepsilon_l$, $\Phi_l(1) < \varepsilon_l$. При этом, как видно из уравнения (4), волновые функции связанных состояний $\psi_l(r, \chi_{tj'})$ являются линейными комбинациями функций $\varphi_l(r, \chi_j)$, а волновая функция состояний рассеяния $\psi_l(r, \chi)$ совпадает с волновой функцией $\varphi_l(r, \chi)$. Единственное же изменение происходит только с энергиями связанных состояний, причем из выражения (52) следует $\delta_l^V(\chi) \equiv 0$.

Заметим, что уравнение (58) может также иметь один (и только один) корень $E' = E_f \geq 1$ и только тогда, когда $\varepsilon_l = +1$, а $\Phi_l(1) < 0$, поскольку

$$\frac{d\Phi_l(E')}{dE'} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n_l} C_{lj}\frac{|\widetilde{V}_l(\chi_j)|^2}{(E' - E_j)^2} > 0$$

при $E' \geq 1$, а $\Phi_l(E') \approx 1$ при $E' \to +\infty$. Это значение энергии E_f соответствует, как мы увидим позже, "поддельному" связанному состоянию.

Теперь рассмотрим в общем случае "поддельные" связанные состояния с энергиями (57), значения которых E_{fk} определяются как корни уравнения (55). Если такие решения уравнения (55) существуют, то решения уравнений (35) и (36) имеют прежний вид (53) и (54). Тем самым волновая функция принимает вид (51) с опущенным первым членом:

$$\psi_l(r, \chi_{fk}) = -\frac{\varepsilon_l N_l(\chi_{fk}) Q_l(\operatorname{cth}\chi_{fk})\widetilde{V}_l(\chi_{fk})}{|F_l^W(\chi_{fk})|\operatorname{sh}\chi_{fk}} \times$$
$$\times \cos\left[r\chi_{fk} - \frac{\pi l}{2} + \delta_l^W(\chi_{fk})\right] + O(e^{-\pi r/4}),$$
$$r \to \infty.$$

Отсюда следует, что волновая функция $\psi_l(r, \chi_{fk})$ асимптотически стремится к нулю, если

$$\widetilde{V}_l(\chi_{fk}) = 0. \tag{59}$$

Итак, необходимым и достаточным условием существования "поддельных" связанных состояний при энергиях (57) является совместное выполнение условий (55) и (59), поскольку граничное условие (5) также выполняется. В свою очередь выполнение условий (55) и (59) означает, что при значениях энергий (57) приращение фазового сдвига $\delta_l^V(\chi')$ при возрастании χ' проходит через значения πk (k — целое) убывая. Это связано с тем, что при таких значениях энергий в силу условий (55) и (59) равны нулю как числитель, так и знаменатель в правой части равенства (52). Но из определений (48), (49) и условий (7) следует, что функции $\Phi_l(\operatorname{ch}\chi')$ и $A_l(\chi')$ существуют и дифференцируемы. Причем функция $A_l(\chi')$ имеет в точках $\chi' = \chi_{fk}$ по крайней мере нуль второго порядка, в то время как функция $\Phi_l(\operatorname{ch}\chi')$ имеет в этих точках только простой нуль, поскольку

$$\left.\frac{d\Phi_l(\operatorname{ch}\chi')}{d\chi'}\right|_{\chi'=\chi_{fk}} = \frac{\operatorname{sh}\chi_{fk}}{2} \times$$
$$\times \left[\sum_{j=1}^{n_l} C_{lj}\frac{|\widetilde{V}_l(\chi_j)|^2}{(\operatorname{ch}\chi_{fk} - \operatorname{ch}\chi_j)^2} + \right.$$
$$\left. + \mathrm{P}\int_0^\infty d\chi \frac{|A_l(\chi)|}{(\operatorname{ch}\chi_{fk} - \operatorname{ch}\chi)^2}\right] > 0.$$

А это означает, что $\operatorname{tg}\delta_l^V(\chi')$ обращается в нуль при $\chi' = \chi_{fk}$ и меняет знак, т.е.

$$\delta_l^V(\chi_{fk}) = \pi k, \quad k = \begin{cases} 1, 2, \ldots, \nu_l, & \varepsilon_l = -1, \\ 0, 1, \ldots, \nu_l - 1, & \varepsilon_l = +1, \end{cases} \tag{60}$$
$$\left.\frac{d\delta_l^V(\chi')}{d\chi'}\right|_{\chi'=\chi_{fk}} < 0.$$

Если же знаменатель в (52) не обращается в нуль при $\chi' = \chi_{fk}$, то приращение фазового сдвига будет только касаться прямых $\delta_l^V = \pi k$ (k — целое) сверху или снизу, но не пересекать их, т.е. в этих точках приращение фазового сдвига имеет экстремумы.

Таким образом, если приращение фазового сдвига $\delta_l^V(\chi')$ при возрастании χ' пересекает прямые $\delta_l^V = \pi k$ ($k = \{0, 1, \ldots, \nu_l - 1, \varepsilon_l = = +1; 1, 2, \ldots, \nu_l, \varepsilon_l = -1\}$) сверху, т.е. условия (55) и (59) выполнены, то энергиям (57) отвечают "поддельные" связанные состояния, обусловленные сепарабельной составляющей полного взаимодействия. Следовательно, исследуя поведение функции $\delta_l^V(\chi')$ при изменении χ', можно найти значения энергий E_{fk}, при которых существуют "поддельные" связанные состояния. Причем знаком приращения фазового сдвига $\delta_l^V(\chi')$ при высоких энергиях ($\chi' \to +\infty$) определяется значение ε_l. Наконец, используя оценку (41) и выражение (52), имеем $\operatorname{tg}\delta_l^V(\infty) = 0$.

Аналогично рассматриваются “поддельные” связанные состояния с энергиями (57), когда локальный квазипотенциал $W(r)$ не допускает связанных состояний. В этом случае значения энергий E_{fk} таких “поддельных” связанных состояний определяются также корнями уравнения (55), в котором теперь необходимо положить $C_{lj} \equiv \equiv 0$. Очевидно, и в этом случае для “поддельных” связанных состояний мы приходим к прежним результатам. Значит, в общем случае мы можем выбрать функцию $\delta_l^V(\chi')$ так, чтобы выполнялось условие

$$\delta_l^V(\infty) = 0. \qquad (61)$$

Для обобщения теоремы Левинсона заметим, что функция Йоста полного взаимодействия

$$F_l(\chi') = |F_l(\chi')| \exp[-i\delta_l(\chi')]$$

является аналитической в полосе $0 \le \mathrm{Im}\chi' \le \pi/2$, имеет там σ_l ($\sigma_l = n_l - 1$, n_l или $n_l + 1$) простых нулей (56), так что $F_l(\chi_{tj'}) = 0$, и не имеет там полюсов. Тогда, применяя теорему о логарифмическом вычете для функции Йоста $F_l(\chi')$ по границе Γ^+ области $0 \le \mathrm{Im}\chi' \le \pi/2$ и учитывая вклад в вариацию от ν_l “поддельных” связанных состояний (свойство (60)) и нечетность фазового сдвига, находим

$$2\pi\sigma_l = -i \lim_{r\to+\infty,\eta\to+0} \int_{\Gamma^+} d\ln F_l(\chi') = $$
$$= - \lim_{r\to+\infty,\eta\to+0} \mathrm{var}\delta_l(\chi')|_{\Gamma^+} =$$
$$= -2\pi\nu_l + 2[\delta_l(0) - \delta_l(\infty)].$$

Здесь $\mathrm{var}\delta_l(\chi')|_{\Gamma^+}$ есть вариация фазового сдвига при обходе точкой χ' замкнутого контура Γ^+ — границы полосы $0 \le \mathrm{Im}\chi' \le \pi/2$. Отсюда, учитывая условие (61), получаем обобщенную теорему Левинсона для суперпозиции нелокального сепарабельного взаимодействия и локального квазипотенциала, когда последний допускает существование n_l связанных состояний, в форме[15)]

$$\delta_l^V(0) = \pi(\sigma_l - n_l + \nu_l). \qquad (62)$$

Отметим, что $\delta_l^V(0) \ge 0$, за исключением единственного случая, когда $\delta_l^V(0) = -\pi$ ($\varepsilon_l = -1$). Последнее имеет место, когда $n_l \ne 0$, $\sigma_l = n_l - 1$, а $\nu_l = 0$. Этот случай существенно отличается как от чисто сепарабельного случая ($W(r) \equiv 0$), так и от случая, когда локальный квазипотенциал $W(r)$ не допускает связанных состояний: в обоих случаях там всегда $\delta_l^V(0) = \pi(\sigma_l + \nu_l) \ge 0$, $\sigma_l = 0, 1$.

[15)]Мы, как всегда, выбрали $\delta_l(\infty) = 0$ и учли обычную теорему Левинсона для локального квазипотенциала, допускающего n_l связанных состояний, а именно

$$\delta_l^W(0) - \delta_l^W(\infty) = \delta_l^W(0) = \pi n_l.$$

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках релятивистского квазипотенциального подхода к квантовой теории поля разработан метод решения конечно-разностного квазипотенциального уравнения с полным квазипотенциалом, описывающим взаимодействие двух релятивистских бесспиновых частиц неравных масс. Причем полное взаимодействие, представляющее собой суперпозицию нелокального сепарабельного и локального квазипотенциалов, считается центрально-симметричным, а его локальная составляющая предполагается известной и допускающей существование n_l связанных состояний. Разработанный метод непосредственно связан с возможностью представить полную энергию двух релятивистских бесспиновых частиц неравных масс в с.ц.и. в виде выражения, пропорционального энергии одной эффективной релятивистской частицы массы m'. При этом показано, что регулярное решение для локального квазипотенциала, как допускающего, так и не допускающего связанных состояний, удовлетворяет условиям ортогональности и полноты при всех значениях энергий. Это позволило найти выражение для приращения фазового сдвига и исследовать его свойства, определить условия существования истинных и “поддельных” связанных состояний, провести сравнение с нерелятивистским случаем и обобщить теорему Левинсона.

Автор выражает искреннюю благодарность Ю.С. Вернову, В.В. Андрееву, В.Н. Капшаю, И.Л. Соловцову и Я. Шнир за интерес к работе и полезное обсуждение полученных результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. K. Chadan, Nuovo Cimento **10**, 892 (1958).
2. M. Bolsterli and J. MacKenzie, Phys. (N.Y.) **2**, 141 (1965).
3. F. Tabakin, Phys. Rev. **177**, 1443 (1969).
4. R. L. Mills and J. F. Reading, J. Math. Phys. (N.Y.) **10**, 321 (1969).
5. R. Barbieri, R. Kogerler, Z. Kunszt, and R. Gatto, Nucl. Phys. B **105**, 125 (1976).
6. R. McClary and N. Byers, Phys. Rev. D **28**, 1692 (1983).
7. Н. Б. Скачков, И. Л. Соловцов, ЯФ **30**, 1079 (1979); ТМФ **41**, 205 (1979); ЯФ **31**, 1332 (1980); ТМФ **43**, 330 (1980).
8. А. П. Мартыненко, Р. Н. Фаустов, ТМФ **64**, 179 (1985); ЯФ **61**, 534 (1998); **63**, 915 (2000); **64**, 1358 (2001).

9. Н. А. Бойкова, Ю. Н. Тюхтяев, Р. Н. Фаустов, ЯФ **64**, 986 (2001).
10. V. N. Kapshai and T. A. Alferova, J. Phys. A **32**, 5329 (1999).
11. A. A. Logunov and A. N. Tavkhelidze, Nuovo Cimento **29**, 380 (1963).
12. V. G. Kadyshevsky, Nucl. Phys. B **6**, 125 (1968).
13. В. Г. Кадышевский, М. Д. Матеев, Р. М. Мир-Касимов, ЯФ **11**, 692 (1970).
14. Ю. Д. Черниченко, ЯФ **63**, 2068 (2000).
15. И. В. Амирханов, Г. В. Груша, Р. М. Мир-Касимов, ЭЧАЯ **12**, 651 (1981).
16. В. Г. Кадышевский, Р. М. Мир-Касимов, Н. Б. Скачков, ЯФ **9**, 212 (1969).
17. В. Г. Кадышевский, Р. М. Мир-Касимов, Н. Б. Скачков, ЭЧАЯ **2**, 635 (1972).

SOLVING A RELATIVISTIC QUASI-POTENTIAL EQUATION FOR THE SUPERPOSITION OF A NONLOCAL SEPARABLE AND LOCAL QUASI-POTENTIALS

Yu. D. Chernichenko

Within the relativistic quasi-potential approach to quantum field theory, a method for solving a finite-difference quasi-potential equation is developed. It is designed for the case when the total quasi-potential simulating the interaction between two relativistic spinless particles of unequal masses is the superposition of a nonlocal separable quasi-potential and a local one. Besides, the local component of total interaction is supposed to be known and that it can both admit bound states and not admit their existence. This has permitted to find an explicit expression for the additional phase shift, to determine the conditions under which bound states may exist, and to generalize the Levinson theorem.