Ю. Д. ЧЕРНИЧЕНКО

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА РАССЕЯНИЯ В РЕЛЯТИВИСТСКОМ КВАЗИКЛАССИЧЕСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ В СЛУЧАЕ НЕРАВНЫХ МАСС

Интенсивное исследование рассеяния частиц и ядер при высоких энергиях стимулировало интерес к релятивистским составным моделям элементарных частиц. При этом было показано [1, 2], что для существенно релятивистских систем, таких, например, как системы, образованные легкими кварками, вклад релятивистских поправок к гамильтониану взаимодействия сравним с «основным» нерелятивистским членом. Необходимость релятивистского описания наиболее очевидна при рассмотрении радиационных распадов мезонов и нуклонных резонансов, когда энергия излучаемого фотона сравнима или больше массы кварков. Тем самым кварк, взаимодействующий с фотоном, неизбежно оказывается релятивистским.

Одним из эффективных методов релятивистского описания системы двух частиц может служить квазипотенциальный подход [3]. При этом потенциал межкваркового взаимодействия однозначно определяется квантовой хромодинамикой лишь на малых расстояних и выбирается кулоновским. В то же время конфигурация потенциала на больших расстояниях из-за отсутствия в настоящее время эффективных методов расчета вне рамок теории возмущений квантовой хромодинамикой не определяется и выбирается феноменологически [4].

Наиболее последовательным способом восстановления потенциала является решение релятивистской обратной задачи [5—8]. Задача восстановления взаимодействия в этих работах формулируется в рамках квазипотенциального подхода [9] для системы двух релятивистских частиц равных масс m.

В данной работе в рамках квазипотенциального подхода [9] рассматривается задача восстановления квазипотенциала взаимодействия двух релятивистских бесспиновых частиц с неравными массами ($m_1 \neq \neq m_2$) по заданному для некоторого интервала энергий набору сдвигов фаз $\delta_l(M)$ и спектру их масс. Основой рассматриваемого подхода является релятивистское уравнение для амплитуды рассеяния двух частиц с неравными массами [10] ($\hbar = c = 1$):

$$A(\mathbf{p}', \mathbf{q}') = -\frac{m'^2}{2\pi(m_1+m_2)} \tilde{V}(\mathbf{p}', \mathbf{q}'; E_{q'}) + + (2\pi)^{-3} \int d\Omega_{k'} \frac{\tilde{V}(\mathbf{p}', \mathbf{k}'; E_{q'}) A(\mathbf{k}', \mathbf{q}')}{\sqrt{s_q} - \sqrt{s_k} + i\varepsilon}, \tag{1}$$

где $d\Omega_{k'} = d\mathbf{k}'/\sqrt{1+(\mathbf{k}'/m')^2}$, $E_{q'} = \sqrt{m'^2 + \mathbf{q}'^2}$.

Это уравнение представляет собой релятивистское обобщение уравнения Липпмана—Швингера в духе геометрии Лобачевского, реализующейся на верхнем поле массового гиперболоида $p'^2 = m'^2$, и описывает рассеяние эффективной релятивистской частицы массы $m' = \sqrt{m_1 m_2}$ с трехмерным относительным импульсом $\mathbf{k}'$ и полной энергией частиц в с. ц. и.:

$$\sqrt{s_k} = \sqrt{m_1^2 + \mathbf{k}^2} + \sqrt{m_2^2 + \mathbf{k}^2} = \frac{m_1 + m_2}{m'} \sqrt{m'^2 + k'^2} \tag{2}$$

на квазипотенциале $\tilde{V}(\mathbf{p}', \mathbf{q}'; E_{q'})$.

Если ввести в рассмотрение волновую функцию $\Psi_{q'}(\mathbf{p}')$, положив

$$\Psi_{q'}(\mathbf{p}') = (2\pi)^3 \sqrt{1 + (\mathbf{p}'/m')^2}\,\delta(\mathbf{p}' - \mathbf{q}') - \frac{2\pi(m_1 + m_2)}{m'^2} \frac{A(\mathbf{p}', \mathbf{q}')}{\sqrt{s_q} - \sqrt{s_p} + i\varepsilon}, \tag{3}$$

то вместо уравнения (1) получим дифференциальную форму релятивистского уравнения Шредингера для волновой функции $\Psi_{q'}(\mathbf{p}')$ в импульсном представлении:

$$(\sqrt{s_q} - \sqrt{s_p})\,\Psi_{q'}(\mathbf{p}') = (2\pi)^{-3} \int d\Omega_k \cdot \tilde{V}(\mathbf{p}', \mathbf{k}'; E_{q'})\,\Psi_{q'}(\mathbf{k}'). \tag{4}$$

Для перехода от импульсного представления в конфигурационное введем в рассмотрение релятивистскую волновую функцию $\psi_{q'}(\mathbf{r})$ в $\mathbf{r}$-представлении, положив [10]

$$\psi_{q'}(\mathbf{r}) = (2\pi)^{-3} \int d\Omega_k \cdot \xi(\mathbf{k}', \mathbf{r})\,\Psi_{q'}(\mathbf{k}'). \tag{5}$$

Функции

$$\xi(\mathbf{p}', \mathbf{r}) = \left(\frac{p_0' - \mathbf{p}' \cdot \mathbf{n}}{m'}\right)^{-1-irm'}, \tag{6}$$

$$p_0' = E_{p'} = \sqrt{m'^2 + \mathbf{p}'^2},\ \mathbf{r} = r\mathbf{n},\ |\mathbf{n}|^2 = 1,$$

играют роль релятивистских плоских волн и удовлетворяют уравнению

$$(\sqrt{s_q} - H_0)\,\xi(\mathbf{q}', \mathbf{r}) = 0, \tag{7}$$

$$H_0 = (m_1 + m_2)\left[\operatorname{ch}\left(\frac{i\lambda'\partial}{\partial r}\right) + \frac{i\lambda'}{r}\operatorname{sh}\left(\frac{i\lambda'\partial}{\partial r}\right) - \frac{\lambda'^2}{2r^2}\Delta_{\theta,\varphi}\exp\left(\frac{i\lambda'\partial}{\partial r}\right)\right]. \tag{8}$$

Здесь $\Delta_{\theta,\varphi}$ — угловая часть оператора Лапласа, а $\lambda' = 1/m'$ — комптоновская длина волны эффективной частицы.

Применение преобразования Шапиро (5) к уравнению (4) с учетом уравнения (7) приводит к релятивистскому аналогу дифференциального уравнения Шредингера с нелокальным взаимодействием в случае неравных масс:

$$(\sqrt{s_q} - H_0)\,\psi_{q'}(\mathbf{r}) = \int d\boldsymbol{\rho} V(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho}; E_{q'})\,\psi_{q'}(\boldsymbol{\rho}), \tag{9}$$

где

$$V(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho}; E_{q'}) = (2\pi)^{-6} \int d\Omega_p \cdot d\Omega_k \cdot \xi(\mathbf{p}', \mathbf{r})\,\tilde{V}(\mathbf{p}', \mathbf{k}'; E_{q'})\,\xi^*(\mathbf{k}', \boldsymbol{\rho}).$$

Для случая локального квазипотенциала уравнение (9) запишется в виде

$$\left[\operatorname{ch}\left(\frac{i\lambda'\partial}{\partial r}\right) + \frac{i\lambda'}{r}\operatorname{sh}\left(\frac{i\lambda'\partial}{\partial r}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{\lambda'^2}{2r^2}\Delta_{\theta,\varphi}\exp\left(\frac{i\lambda'\partial}{\partial r}\right) - X(r)\right]\psi_{q'}(\mathbf{r}) = 0, \tag{10}$$

где введены обозначения:

$$M = \sqrt{s_q},\ X(r) = [M - V(r; E_{q'})]/(m_1 + m_2). \tag{11}$$

Наконец, используя парциальное разложение волновой функции с данным собственным значением массы M по радиальным волновым функциям $\varphi_l(r)$:

$$\psi_{q'}(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l + 1)\, i^l\, \frac{\varphi_l(r)}{r} P_l\left(\frac{\mathbf{q}' \cdot \mathbf{r}}{q' r}\right),$$

вместо уравнения (10) получим

$$\left[\operatorname{ch}\left(\frac{i\lambda' d}{dr}\right)+\frac{\lambda'^2 l(l+1)}{2r^{(2)}}\exp\left(\frac{i\lambda' d}{dr}\right)-X(r)\right]\varphi_l(r)=0, \qquad (12)$$

где $r^{(2)}=r(r+i\lambda')$.

Таким образом, и для случая неравных масс релятивистская проблема двух тел сводится к одночастичной. Это дает возможность применения тех же математических методов, что используются и в задаче для частиц с равными массами.

Решение уравнения (12) в релятивистском квазиклассическом приближении, как и в случае равных масс, дается выражением [11, 12]:

$$\varphi_l(r)=\varphi_l^{(+)}(r)+\varphi_l^{(-)}(r),$$

$$\varphi_l^{(\pm)}(r)=C_\pm\sqrt{M}\,(X^2(r)-R^2(r))^{-1/4}\exp\left[(i/\lambda')\int dr\chi_\pm(r)+\varphi\right], \qquad (13)$$

где

$$R^2(r)=1+\Lambda^2/r^2,\ \Lambda=\lambda'(l+1/2),\ \chi_\pm(r)=\ln\left[X(r)\pm\sqrt{X^2(r)-R^2(r)}\right]. \qquad (14)$$

Здесь $C_\pm$ — нормировочные константы, а φ — волновые фазы, которые находятся подобно тому, как это делается в квантовой механике.

Пусть квазипотенциал $V(r)$ не содержит кулоновского взаимодействия. Тогда в рамках релятивистского квазиклассического приближения спектральная функция и фазовый сдвиг определяются выражениями:

$$S_\text{к}(\mu,\ \Lambda)\equiv\pi\lambda'[n(M,\ l)+1/2]=\int_{r_\text{к}^-}^{r_\text{к}^+}dr\chi_\text{эф}(r), \qquad (15)$$

$$f_\text{к}(\mu,\ \Lambda)\equiv\lambda'\delta_l(M)=\lim_{r\to\infty}\left\{\int_{r_\text{к}^-}^{r}d\rho\chi_\text{эф}(\rho)-\int_{r_\text{в}^-}^{r}d\rho\chi_\text{в}(\rho)\right\},\ k=0,\ 1, \qquad (16)$$

где

$$\chi_\text{эф}(r)=\operatorname{arch}[1+(\mu-V_M(r))/R(r)],\ \chi_\text{в}(r)=\operatorname{arch}[1+(\mu-V_\text{в}(r))/R(r)]. \qquad (17)$$

Точки поворота $r_\text{к}^\pm=r_\text{к}^\pm(\mu,\ \Lambda)$ модифицированного квазипотенциала $V_M(r)$ удовлетворяют условию

$$V_M(r_\text{к}^\pm)=\mu,\ V_M(r)=R(r)+\mu_0-1+V(r)/(m_1+m_2), \qquad (18)$$

а $r_\text{в}^-=r_\text{в}^-(\mu,\ \Lambda)$ при отсутствии кулоновского взаимодействия определяется выражением

$$r_\text{в}^-=\Lambda[(\mu-\mu_0+1)^2-1]^{-1/2} \qquad (19)$$

и является точкой поворота базового потенциала $V_\text{в}(r)$:

$$V_\text{в}(r_\text{в}^-)=\mu,\ V_\text{в}(r)=R(r)+\mu_0-1. \qquad (20)$$

Величина M_0, входящая в определение безразмерных параметров

$$\mu=(M-M_0)/(m_1+m_2),\ \mu_0=(m_1+m_2-M_0)/(m_1+m_2), \qquad (21)$$

является минимумом квазипотенциала, т. е. $S_0(0,\ \Lambda)=0$.

Далее, следуя решению релятивистской обратной задачи для случая равных масс [7, 8], определим при отсутствии кулоновского взаимодействия инклюзию ($k=0$):

$$I_0(\mu,\ \Lambda)=\theta(\mu-\mu_0)\lim_{r\to\infty}\left\{\int\limits_{r_0^-}^{r} d\rho\,[\mu-V_M(\rho)]-\int\limits_{r_{\text{в}}^-}^{r} d\rho\,[\mu-V_{\text{в}}(\rho)]\right\}+$$

$$+[\theta(\mu)-\theta(\mu-\mu_0)]\int\limits_{r_0^-}^{r_0^+} dr\,[\mu-V_M(r)] \tag{22}$$

и оператор

$$D_\mu[h]=\int\limits_0^{\mu} d\mu' g(\mu-\mu')\,h(\mu',\ \Lambda). \tag{23}$$

При этом фазово-спектральная функция $h_0(\mu,\ \Lambda)$ определяется выражением:

$$h_0(\mu,\ \Lambda)=\theta(\mu-\mu_0)\,f_0(\mu,\ \Lambda)+[\theta(\mu)-\theta(\mu-\mu_0)]\,S_0(\mu,\ \Lambda), \tag{24}$$

где $\theta(\mu)$ — обычная ступенчатая функция.

Функция $g(t)$, входящая в оператор (23), определяется, как и в релятивистской обратной задаче для случая равных масс, выражением

$$g(t)=\pi^{-2}\int\limits_0^{\infty} dp\,p^{-1}\exp[-p(t-1)]/I_0(p)\,[1+(K_0(p)/\pi I_0(p))^2],$$

где $I_0(p)$, $K_0(p)$ — функции Бесселя мнимого аргумента нулевого порядка.

Потребуем, чтобы действие оператора (23) на (24) после изменения порядка интегрирования давало инклюзию (22) при условии (21):

$$D_\mu[h_0]=I_0(\mu,\ \Lambda). \tag{25}$$

Конечные формулы, решающие релятивистскую обратную задачу для случая неравных масс при отсутствии кулоновского взаимодействия, находятся путем дифференцирования (25) по μ и Λ:

$$\theta(\mu-\mu_0)(r^- - r_0^-)+[\theta(\mu)-\theta(\mu-\mu_0)](r_0^+-r_0^-)=\frac{\partial}{\partial\mu}D_\mu[h_0], \tag{26}$$

$$\operatorname{arsh}(\Lambda/r_0^+)-\operatorname{arsh}(\Lambda/r_0^-)=\frac{\partial}{\partial\Lambda}D_\mu[h_0],\ 0\leqslant\mu\leqslant\mu_0. \tag{27}$$

Для учета особенности кваркового взаимодействия на малых расстояниях введем в квазипотенциал кулоновское притяжение

$$V(r)=U(r)-\alpha/r,\ \alpha>0. \tag{28}$$

В этом случае выражение для фазово-спектральной функции имеет прежний вид (24), но имеются две точки поворота базового потенциала

$$V_{\text{в}}(r_{\text{в}}^{\pm})=\mu,\ V_{\text{в}}(r)=R(r)+\mu_0-1-\alpha/(m_1+m_2)\,r. \tag{29}$$

Это приводит к тому, что в решениях (26), (27) появляется дополнительный член:

$$\theta(\mu-\mu_0)(r_{\text{в}}^- - r_0^-)+[\theta(\mu-\theta(\mu-\mu_0)](r_0^+-r_0^-)+$$

$$+\theta(\mu-\mu_0)\frac{\partial}{\partial\mu}\int\limits_{\nu_{\text{в}}}^{\mu_0} d\mu' g(\mu-\mu')\,S_{\text{в}}(\mu',\ \Lambda)=\frac{\partial}{\partial\mu}D_\mu[h_0], \tag{30}$$

$$\operatorname{arsh}(\Lambda/r_0^+)-\operatorname{arsh}(\Lambda/r_0^-)+\theta(\mu-\mu_0)\frac{\partial}{\partial\Lambda}\int\limits_{\nu_{\text{в}}}^{\mu_0} d\mu' g(\mu-\mu')\,S_{\text{в}}(\mu',\ \Lambda)=$$

$$= \frac{\partial}{\partial \Lambda} D_\mu [h_0], \ 0 \leqslant \mu \leqslant \mu_0, \tag{31}$$

где

$$S_в (\mu, \ \Lambda) = \int\limits_{r_в^-}^{r_в^+} dr \chi_в (r), \ \nu_в \leqslant \mu \leqslant \mu_0,$$

есть спектральная функция базового потенциала (29), удовлетворяющая условию

$$S_в (\nu_в, \ \Lambda) = 0. \tag{32}$$

В то же время при учете кулоновского отталкивания квазипотенциал и базовый потенциал определяются формулами (28), (29), но с заменой $\alpha = -\alpha$. Фазово-спектральная функция в этом случае имеет вид

$$h_1 (\mu, \ \Lambda) = \theta (\mu - \mu_1) f_1 (\mu, \ \Lambda) + [\theta (\mu - \mu_0) - \theta (\mu - \mu_1)] f_0 (\mu, \ \Lambda) + \\ + [\theta (\mu) - \theta (\mu - \mu_1)] S_1 (\mu, \ \Lambda) \tag{33}$$

при условии

$$S_1 (0, \ \Lambda) = 0. \tag{34}$$

В этом случае решение релятивистской обратной задачи для неравных масс дается формулами:

$$\theta (\mu - \mu_1) (r_в^- - r_1^-) + [\theta (\mu - \mu_0) - \theta (\mu - \mu_1)] (r_в^- - r_0^-) + \\ + [\theta (\mu) - \theta (\mu - \mu_1)] (r_1^+ - r_1^-) = \frac{\partial}{\partial \mu} D_\mu [h_1], \tag{35}$$

$$[\theta (\mu - \mu_0) - \theta (\mu - \mu_1)] [\operatorname{arsh} (\Lambda / r_в^-) - \operatorname{arsh} (\Lambda / r_0^-)] + [\theta (\mu) - \theta (\mu - \mu_1)] \times \\ \times [\operatorname{arsh} (\Lambda / r_1^+) - \operatorname{arsh} (\Lambda / r_1^-)] = \frac{\partial}{\partial \Lambda} D_\mu [h_1], \ 0 \leqslant \mu \leqslant \mu_1. \tag{36}$$

Итак, возможность представить полную энергию двух релятивистских частиц с неравными массами в с.ц.и. в виде выражения (2), пропорционального энергии эффективной релятивистской частицы массы m' (переходящей в массу m при $m_1 = m_2 = m$), позволило свести решение релятивистской обратной задачи в квазиклассическом приближении для случая неравных масс к одночастичной проблеме.

В заключение отметим ряд обстоятельств. Во-первых, изложенный подход позволяет восстановить квазипотенциал и в более общих случаях кусочно-непрерывной фазово-спектральной функции, что будет отвечать квазипотенциалу с соответствующим числом экстремумов. Во-вторых, неоднозначности, возникающие в решении релятивистской обратной задачи, например формулы (35), (36), аналогичны той ситуации, которая имеет место и в точной теории, когда информация о положении связанных состояний вместе с данными о фазовом сдвиге недостаточна для полного определения потенциала.

Автор глубоко признателен Ю. С. Вернову, И. Л. Соловцову и Р. Н. Фаустову за интерес к работе и полезное обсуждение полученных результатов.

Summary

The Method of Reconstruction Quasipotential of the Interaction Two Relativistic Particles with Unequal Mass by Means of the Phase Shifts and Mass Spectrum Is Elaborated on the Base of the Quasipotential Approach to the Quantum Field Theory in the Framework of the Relativistic Quasiclassical Approximation.

Литература

1. Barbieri R., Kogerler R., Kunszt Z., Gatto R. // Nucl. Phys. 1976. Vol. B105, N 1. P. 125—138.
2. McClary R., Byers N. // Phys. Rev. 1983. Vol. D28, N 7. P. 1692—1705.
3. Logunov A. A., Tavkhelidze A. N. // Nuovo Cim. 1963. Vol. 29, N 2. P. 380—400.
4. Базь А. И., Демин В. Ф., Жуков М. В. // ЭЧАЯ. 1975. Т. 6, вып. 2. С. 515—563.
5. Соловцов И. Л. // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. 1982. № 1. С. 109—112.
6. Соловцов И. Л., Черниченко Ю. Д. // ЯФ. 1985. Т. 42, вып. 2(8). С. 494—503; Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. 1985. № 6. С. 107—110; Изв. вузов. Физика. 1984. № 4. С. 63—68.
7. Соловцов И. Л., Черниченко Ю. Д. // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. 1988. № 3. С. 103—109; Проблемы физики высоких энергий и теории поля: Тр. X семинара. М., 1988. С. 472—479; Изв. вузов. Физика. 1987. № 5. С. 11—17.
8. Черниченко Ю. Д. // Препринт НИИЯФ МГУ 88-019/40. М., 1988.
9. Kadyshevsky V. G., Mir-Kasimov R. M., Skachkov N. B. // Nuovo Cim. 1968. Vol. 55A, N 2. P. 233—257.
10. Кадышевский В. Г., Мир-Касимов Р. М., Скачков Н. Б. // ЭЧАЯ. 1972. Т. 2, вып. 3. С. 635—690.
11. Донков А. Д., Кадышевский В. Г., Матеев М. Д., Мир-Касимов Р. М. Матер. IV Междунар. совещ. по нелокальным теориям поля. Алушта, 1976; Препринт ОИЯИ Д2-9788. Дубна, 1976. С. 36—56.
12. Скачков Н. Б., Соловцов И. Л. // ЯФ. 1980. Т. 31, вып. 5. С. 1332—1341.

Гомельский политехнический институт

Поступила в редакцию 24.04.92

УДК 548.0:535+537.212.01

Н. С. ЛЕШЕНЮК, В. Н. СЕВЕРИКОВ, А. Ф. СИНЮК, И. А. ЯДРОЙЦЕВ

РАСЧЕТ АНИЗОТРОПИИ КРИСТАЛЛОВ ПРИ ЛИНЕЙНОМ ЭЛЕКТРООПТИЧЕСКОМ ЭФФЕКТЕ

Модуляторы света находят все более широкое применение для управления параметрами лазерного излучения [1]. В основе их работы лежат различные физические эффекты, обеспечивающие возникновение вынужденной анизотропии вещества. К таким эффектам, в частности, относится эффект Поккельса, который наблюдается в кристаллах, не обладающих центром симметрии, при воздействии на них электрического поля. Для получения определенных характеристик модулируемого излучения необходимо рассчитать характер изменения анизотропии при соответствующем изменении напряженности электрического поля. Существующие методики расчета таких модуляторов базируются на расчете эллипсоида оптической индикатрисы и достаточно громоздки [1]. Аналитические выражения для расчета электрооптического эффекта в постоянных полях получены в работах [2, 3]; в то же время разработка удобной методики расчета для нестационарных полей важна для решения прикладных задач. При описании прохождения света через электрооптический кристалл практический интерес представляют величины и ориентации полуосей центрального сечения оптической индикатрисы плоскостью волнового фронта, что позволяет упростить расчеты оптических свойств кристалла при заданном изменении напряженности электрического поля. Общие выражения для таких расчетов можно получить путем решения уравнений Максвелла, записанных в ковариантной форме [4]. Для немагнитного, прозрачного кристалла, через кото-