Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XCIII, № 4

ГИДРАВЛИКА

А. К. АНАНЯН

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТУРБУЛЕНТНОГО ПОТОКА НА ПОВОРОТЕ ВОДОВОДА

(Представлено академиком А. И. Некрасовым 2 X 1953)

Известно, что при движении жидкости в водоводах, изогнутых в плане по какой-либо кривой, наряду с продольным движением возникает циркуляционное движение в плоскости живого сечения.

При выводе дифференциальных уравнений циркуляционного движения жидкости на повороте водовода ниже за основу принимаются дифференциальные уравнения осредненного турбулентного потока. Эти уравнения легко получаются из уравнений динамического равновесия упругой среды, если примем, по аналогии с ламинарным движением, что тензоры турбулентных напряжений пропорциональны соответствующим скоростям деформации и коэффициенту турбулентной вязкости, который является функцией координат и не зависит от физических свойств жидкости.

Записав уравнение осредненного турбулентного движения [1] для осесимметричного потока в цилиндрических координатах, получим:

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial H}{\partial R}+u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}-u_z\frac{\partial u_z}{\partial R}-u_\theta\frac{\partial u_\theta}{\partial R}-\frac{u_\theta^2}{R}=\frac{A}{\rho}\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial R^2}+\frac{\partial^2 u_R}{\partial z^2}+\frac{1}{R}\frac{\partial u_R}{\partial R}-\frac{u_R}{R^2}\right)+\\
+\frac{1}{\rho}\left(2\frac{\partial A}{\partial R}\frac{\partial u_R}{\partial R}+\frac{\partial A}{\partial z}\frac{\partial u_z}{\partial R}+\frac{\partial A}{\partial z}\frac{\partial u_R}{\partial z}\right);\\
\frac{1}{R}\frac{\partial H}{\partial\theta}+u_R\frac{\partial u_\theta}{\partial R}+u_z\frac{\partial u_\theta}{\partial z}+\frac{u_R u_\theta}{R}=\frac{A}{\rho}\left(\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial R^2}+\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2}+\frac{1}{R}\frac{\partial u_\theta}{\partial R}-\frac{u_\theta}{R^2}\right)+\\
+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial A}{\partial R}\frac{\partial u_\theta}{\partial R}+\frac{\partial A}{\partial z}+\frac{\partial A}{\partial z}\frac{\partial u_\theta}{\partial z}\right);\\
\frac{\partial H}{\partial z}+u_R\frac{\partial u_z}{\partial R}-u_\theta\frac{\partial u_\theta}{\partial z}-u_R\frac{\partial u_R}{\partial z}=\frac{A}{\rho}\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial R^2}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}+\frac{1}{R}\frac{\partial u_z}{\partial R}\right)+\\
+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial A}{\partial R}\frac{\partial u_z}{\partial R}+2\frac{\partial A}{\partial z}\frac{\partial u_z}{\partial z}+\frac{\partial A}{\partial R}\frac{\partial u_R}{\partial z}\right),
\end{gathered}
\tag{1}
$$

где

$$
H=U+\frac{p}{\rho}+\frac{\left(u_\theta^2+u_z^2+u_R^2\right)}{2}. \tag{2}
$$

Присоединяя к этим уравнениям уравнение непрерывности

$$
\frac{\partial u_R}{\partial R}+\frac{\partial u_z}{\partial z}+\frac{u_R}{R}=0 \tag{3}
$$

и используя выражение для коэффициента турбулентной вязкости (например для круга)

$$A = -\frac{\tau}{du/dz}, \tag{4}$$

получим замкнутую систему, так как число уравнений будет равно числу неизвестных (u_θ, u_R, u_z, p и A).

Для вывода дифференциального уравнения движения жидкости на повороте водовода вводим следующие допущения и гипотезы.

1. Принимаем, что в соответствующих точках всех поперечных сечений изогнутого водовода скорости не меняются, т. е. принимаем движение осесимметричным.

2. Принимаем, что скорости на повороте водовода равны с точностью $O(1/R)$ скоростям на прямолинейном участке водовода. Эта гипотеза тем точнее отвечает действительности, чем больше радиус закругления водовода. Из этой гипотезы следует, что коэффициент турбулентной вязкости с точностью $O(1/R)$ есть функция продольных скоростей на прямом участке водовода.

3. Пренебрегаем величиной $1/R^2$ по сравнению с $1/R$. Порядок величины продольной скорости (u_θ) принимаем за единицу. Тогда нетрудно показать, что компоненты скорости u_z и u_R и их производные по z и R имеют $O(1/R)$. Действительно, раскладывая функцию $u_R(1/R, u_\theta, z)$ в ряд Тейлора, получим $u_R\left(\frac{1}{R}, u_\theta, z\right) = u_R(0, u_\theta, z) + \frac{1}{R} u_R'(0, u_\theta, z) + \ldots$, откуда следует указанное выше условие, так как $u_R(0, u_\theta, z) = 0$.

С учетом вышеуказанных допущений и гипотез первое и третье уравнения системы (1) и уравнение неразрывности (3) можно представить в следующем виде:

$$\frac{\partial H}{\partial R} - u_\theta \frac{\partial u_\theta}{\partial R} - \frac{u_\theta^2}{R} = \frac{A}{\rho}\left(\frac{\partial^2 u_R}{\partial R^2} + \frac{\partial^2 u_R}{\partial z^2}\right) + \\ + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial A}{\partial R}\frac{\partial u_R}{\partial R} + \frac{\partial A}{\partial z}\frac{\partial u_z}{\partial R} + \frac{\partial A}{\partial z}\frac{\partial u_R}{\partial z}\right); \tag{5}$$

$$\frac{\partial H}{\partial z} - u_\theta \frac{\partial u_\theta}{\partial z} = \frac{A}{\rho}\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial R^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right) + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial A}{\partial R}\frac{\partial u_z}{\partial R} + 2\frac{\partial A}{\partial z}\frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\partial A}{\partial R}\frac{\partial u_R}{\partial z}\right);$$

$$\frac{1}{R}\frac{\partial (R u_R)}{\partial R} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0. \tag{6}$$

Из уравнения неразрывности имеем:

$$u_R = -\frac{1}{R}\frac{\partial F}{\partial z}, \quad u_z = \frac{1}{R}\frac{\partial F}{\partial R}, \tag{7}$$

где F — функция поперечной циркуляции (см. ниже).

Дифференцируя первое уравнение (5) по z, а второе по R и вычитая одно выражение из другого, получим с учетом (7) после несложных преобразований искомое дифференциальное уравнение движения жидкости на повороте водовода:

$$\frac{\partial^2}{\partial R^2}\left(A\frac{\partial^2 F}{\partial R^2}\right) - \frac{\partial^2}{\partial R^2}\left(A\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\right) - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(A\frac{\partial^2 F}{\partial R^2}\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(A\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\right) + \\ + 4\frac{\partial^2}{\partial R\,\partial z}\left(A\frac{\partial^2 F}{\partial R\,\partial z}\right) = 2u_\theta \rho \frac{\partial u_\theta}{\partial z}. \tag{8}$$

В этом уравнении два неизвестных: F и u_θ. Для решения задачи о поперечной циркуляции с точностью $O(1/R)$ задаемся продольными скоростями на прямом участке водовода до поворота. Тогда, решая уравнение (8) при определенных граничных условиях, мы определяем функцию F, а по (7) — искомые компоненты скоростей поперечной циркуляции на изогнутом участке водовода.

Предполагаем, что если водовод гладкий, то в придонном слое потока образуется ламинарная пленка. Иначе говоря принимаем, что поток состоит из турбулентного ядра, для которого применимо уравнение (8), и ламинарной пленки толщиной δ, для которой будем иметь уравнение

$$\Delta^2 F_л = 2\mu \frac{u_\theta}{\rho} \frac{\partial u_\theta}{\partial z}. \tag{9}$$

Нетрудно видеть, что уравнение (9) получается из уравнения (8) путем замены переменного коэффициента турбулентной вязкости A постоянным коэффициентом физической вязкости μ.

Таким образом, решение задачи о поперечной циркуляции сводится к решению контактной задачи гидромеханики при следующих граничных условиях:

1. Условие прилипания частиц жидкости к стенкам водовода, т. е.

$$F_л \Big|_Г = 0; \quad \frac{\partial F_л}{\partial n}\Big|_Г = 0. \tag{10}$$

2. Условие равенства скоростей на поверхности контакта двух зон (турбулентное ядро и ламинарная пленка)

$$\frac{\partial F}{\partial n}\Big|_{Г_0} = \frac{\partial F_л}{\partial n}\Big|_{Г_0}. \tag{11}$$

3. Условие неразрывности циркуляционного потока

$$\int_0^{Г_0} \frac{\partial F}{\partial n} dn + \int_{Г_0}^{Г} \frac{\partial F_л}{\partial n} dn = 0. \tag{12}$$

4. Условие равенства касательных напряжений на контактной поверхности

$$A\left(\frac{\partial^2 F}{\partial n^2} - \frac{1}{r_0}\frac{\partial F_л}{\partial n}\right)\Big|_{Г_0} = \mu \frac{\partial^2 F_л}{\partial n^2}\Big|_{Г_0}; \tag{13}$$

r_0 — радиус кривизны периферии поперечного сечения водовода; $\partial/\partial n$ — производная по направлению нормали к поверхности водовода.

Вышеуказанные граничные условия равенства скоростей и касательных напряжений на контактной поверхности можно представить также в следующем виде ([2], [4]):

$$F\Big|_{Г_0} = 0, \quad \delta \frac{A}{\mu}\frac{\partial^2 F}{\partial n^2} + \frac{\partial F}{\partial n}\left(1 - \frac{A\delta}{\mu r_0}\right)\Big|_{Г_0} = 0. \tag{14}$$

После совместного решения уравнений (8) и (9) при указанных выше граничных условиях получаем значения функций F и $F_л$, а следовательно, и компонент скоростей поперечной циркуляции. В том случае, когда нас не интересует распределение скоростей в пределах ламинарной пленки, решение задачи сводим к решению уравнения (8) при граничных условиях (14). Поставленная задача решается методами вариационного исчисления (метод Галеркина ([2])).

Теперь переходим к анализу второго уравнения системы (1).

Согласно второй гипотезе закон распределения продольных скоростей на участке поворота водовода можно представить в виде

$$u_0(R, z) = u(x, z) + \frac{J(R, z)}{R} = \frac{S}{R}, \tag{15}$$

где $u(x, z)$ — функция распределения продольных скоростей на прямолинейном участке водовода; $J(R, z)$ — функция, характеризующая изменение продольных скоростей на участке поворота; R — радиус закругления водовода $R = R_0 + x$; R_0 — радиус закругления оси водовода.

С учетом (15) второе уравнение системы (1) после простых преобразований можно представить в виде

$$\frac{\partial H}{R\,\partial\theta} - \frac{1}{R^2}\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial S}{\partial R} + \frac{S}{R^3} + \frac{1}{R^2}\frac{\partial F}{\partial R}\frac{\partial S}{\partial R} = \frac{A}{\rho}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial^2 S}{\partial R^2} - \frac{1}{R^2}\frac{\partial S}{\partial R} + \frac{S}{R^3} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{R}\frac{\partial^2 S}{\partial z^2}\right) + \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial A}{\partial R}\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{S}{R}\right) + \frac{\partial A}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{S}{R}\right)\right]. \qquad (16)$$

Отбрасывая величины второго порядка малости, получаем:

$$\frac{\partial^2 J}{\partial R^2} + \frac{\partial^2 J}{\partial z^2} + \frac{1}{A}\left(\frac{\partial A}{\partial R}\frac{\partial J}{\partial R} + \frac{\partial A}{\partial z}\frac{\partial J}{\partial z}\right) = \varphi(R, z), \qquad (17)$$

где $\varphi(R, z)$ — известная функция:

$$\varphi(R, z) = \rho\frac{R}{A}\left\{\left[\frac{\partial H}{R\,\partial\theta} - \frac{A}{\rho}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial R^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) - \frac{A}{\rho R}\frac{\partial u}{\partial R} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A}{\partial R}\frac{\partial u}{\partial R} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial z}\right] - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{R}\left(\frac{\partial F}{\partial R}\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial R}\right)\right\}. \qquad (18)$$

Здесь u — распределение продольных скоростей до поворота водовода; A — коэффициент турбулентной вязкости; F — функция поперечной циркуляции для турбулентного ядра; $\frac{1}{g}\frac{\partial H}{R\,\partial\theta}$ — потери энергии на длине $R\,\partial\theta$ закругления водовода, в первом приближении эту потерю можно принимать численно равной уклону свободной поверхности на прямом участке водовода.

Уравнение (17) решается методом последовательного приближения. После определения функции $J(R, z)$ при помощи выражения (15) легко вычислить продольные скорости на закругленном участке водовода.

Нами были получены интегралы дифференциальных уравнений (2) и (3) для водоводов круглого и прямоугольного сечения. Получено также приближенное решение этих уравнений для водоводов трапецоидального и треугольного сечений. Сопоставление данных расчетов по формулам с данными экспериментов дало хорошие результаты ([3]).

На основании произведенных исследований можно притти к следующему выводу. Если задано поле продольных скоростей на прямом участке водовода до поворота, то при помощи уравнений (8), (9) и (17) с учетом граничных условий (10) — (14) можно вычислить в первом приближении компоненты скорости и остальные динамические параметры потока на повороте водовода.

Водно-энергетический институт
Академии наук Арм.ССР

Поступило
15 VII 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе, Теоретическая гидромеханика, ч. II, М.—Л., 1948. [2] А. К. Ананян, Изв. АН Арм.ССР, сер. естеств. и техн. наук, 6, № 1, Ереван (1953). [3] А. К. Ананян, Поперечная циркуляция при изгибе турбулентного потока, Автореферат докторской диссертации, 1952. [4] Л. А. Оганесян, Докл. Арм.ССР, 15, № 3 (1952).