Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XCIII, № 4

МАТЕМАТИКА

М. В. ЯКОВКИН

НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ПРИВОДИМОСТИ МНОГОЧЛЕНОВ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 28 IX 1953)

В разное время различными авторами было высказано довольно большое число достаточных условий (критериев) неприводимости многочленов. Но в математической литературе, повидимому, отсутствуют более или менее простые условия, являющиеся необходимыми и достаточными для приводимости или неприводимости многочленов.

В настоящей статье доказываются некоторые предложения алгебраического и теоретико-числового характера, устанавливающие взаимосвязь между числовыми равенствами и многочленными тождествами.

В качестве следствий из доказываемых предложений вытекают весьма простые необходимые и достаточные условия приводимости или неприводимости многочленов, позволяющие в случае приводимости находить разложение любого многочлена на множители, неприводимые в поле рациональных чисел.

Теорема 1. *Пусть*

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k},\quad \varphi(x)=\sum_{k=0}^{p} b_k x^{p-k},\quad \psi(x)=\sum_{k=0}^{q} c_k x^{q-k} \tag{1}$$

целочисленные функции с неотрицательными коэффициентами. Для справедливости тождества

$$f(x)=\varphi(x)\psi(x) \tag{2}$$

необходимо и достаточно, чтобы имели место равенства

$$f(1)=\varphi(1)\psi(1),\quad f(t)=\varphi(t)\psi(t), \tag{3}$$

хотя бы при одном целом значении t, превышающем все коэффициенты этих функций.

Доказательство. Необходимость очевидна, поэтому ограничимся лишь доказательством достаточности.

Прежде всего заметим, что если значения $f(t)$, $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ разложить по степеням числа t, то коэффициенты этих разложений будут совпадать с соответствующими коэффициентами функций (1). Доказательство этого основного факта мы опускаем.

Разложениями значений $f(t)$, $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ по степеням t будут:

$$f(t)=\sum_{k=0}^{n} a_k t^{n-k},\quad \varphi(t)=\sum_{k=0}^{p} b_k t^{p-k},\quad \psi(t)=\sum_{k=0}^{q} c_k t^{q-k}. \tag{4}$$

Перемножим разложения (4) для $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ друг на друга по правилу умножения многочленов. Пусть это произведение имеет вид:

$$\varphi(t)\psi(t) = A_0 t^m + A_1 t^{m-1} + \ldots + A_m. \qquad (5)$$

Выражение (5) должно быть разложением числа $\varphi(t)\psi(t)$ по степеням t. В противном случае сумма коэффициентов A_k $(k=0, 1, 2, \ldots, m)$ выражения (5) превышала бы сумму коэффициентов a_k $(k=0, 1, 2, \ldots, n)$ разложения из (4) числа $f(t)$ по степеням t. Иначе говоря, при таком допущении мы пришли бы к соотношению $f(1) < \varphi(1)\psi(1)$, противоречащему условию теоремы.

Следовательно, выражение (5) является разложением числа $\varphi(t)\psi(t) = f(t)$ по степеням t. Но так как разложение одного числа по степеням другого возможно только единственным образом, то разложение для $f(t)$ из (4) и разложение (5) для $\varphi(t)\psi(t)$ должны быть одинаковыми. Это означает, что $a_i = A_i$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, m = n)$, а это, в свою очередь, означает, что $f(x) = \varphi(x)\psi(x)$.

Доказанная теорема может быть обобщена или усилена в различных направлениях. Совершенно таким же образом, например, доказывается более общая теорема.

Теорема 2. *Для справедливости тождества* (2) *необходимо и достаточно, чтобы имели место равенства*

$$f(t_1) = \varphi(t_1)\psi(t_1), \quad f(t_2) = \varphi(t_2)\psi(t_2),$$

где t_1 и t_2 — *целые положительные числа, одно из которых превышает все коэффициенты рассматриваемых функций.*

Обе эти теоремы справедливы для любого конечного числа сомножителей.

В условии этих теорем достаточно полагать число t (в теореме 1) и одно из чисел t_1 или t_2 (в теореме 2) превышающими все коэффициенты только функции $f(x)$.

Укажем на некоторые следствия, вытекающие из этих теорем.

Пусть $f(x)$ — целочисленный многочлен с неположительной верхней границей вещественных частей корней* и пусть t — любое целое положительное число, большее всех коэффициентов $f(x)$. Тогда имеет место следующее следствие:

Следствие 1. *Для приводимости* $f(x)$ *в поле рациональных чисел необходимо и достаточно, чтобы число* $f(t)$ *имело по крайней мере двух целых самножителей, произведение сумм коэффициентов разложения по степеням* t *которых было бы равно сумме коэффициентов* $f(x)$.

В частности, при $t = 10^m$, где m — число цифр в наибольшем из коэффициентов $f(x)$, мы имеем:

Следствие 2. *Для приводимости* $f(x)$ *в поле рациональных чисел необходимо и достаточно, чтобы число* $f(t)$ *имело по крайней мере двух целых сомножителей, произведение сумм граней которых по* m *цифр было бы равно сумме коэффициентов* $f(x)$.

Из приведенных теорем вытекает следующая взаимосвязь между числовыми и функциональными равенствами:

Следствие 3. *Если для трех (или нескольких) чисел* $f(t)$, $\varphi(t)$ *и* $\psi(t)$, *записанных в* t-*ичной системе счисления, имеет место равенство* $f(t) = \varphi(t)\psi(t)$ *и если произведение сумм* $\varphi(1)$ *и* $\psi(1)$ *коэффициентов разложений двух из них равно сумме коэффициентов* $f(1)$ *разложения третьего числа, то равенство* $f(t) = \varphi(t)\psi(t)$ *справедливо при всяком значении* t.

* К такому виду приводится любой целочисленный многочлен лишь с помощью одного линейного преобразования (1).

Наконец, аналогичные теоремы и следствия имеют место и для любых целочисленных многочленов. За неимением места приведем только одну из таких теорем.

Теорема 3. *Пусть* R^* — *наибольшая из верхних границ вещественных частей корней целочисленных функций* $f_0(x)$, $f_1(x), \ldots$ $\ldots, f_r(x)$. *Для справедливости тождества*

$$f_0(x) = f_1(x) f_2(x) \ldots f_r(x)$$

необходимы и достаточны равенства

$$f_0(k_1 + k) = \prod_{s=1}^{r} f_s(k_1 + k), \quad f_0(k_2 + k) = \prod_{s=1}^{r} f_s(k_2 + k),$$

где k_1, k_2 и k — *целые числа, удовлетворяющие условиям*: $k \geqslant R^*$, *а одно из чисел* k_1 *или* k_2 *больше* $\left|f_0^{(i)}(k)\right| / i!$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$, *где* n — *степень функции* $f(x)$.

Поступило
27 V 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. В. Яковкин, ДАН, 28, № 9 (1940).