Доклады Академии Наук СССР
1953, Том XCIII, № 4

МАТЕМАТИКА

Ю. Л. ШМУЛЬЯН

О ГОЛОМОРФНЫХ ОГРАНИЧЕННЫХ МАТРИЦАХ-ФУНКЦИЯХ С ОПРЕДЕЛИТЕЛЕМ, ТОЖДЕСТВЕННО РАВНЫМ НУЛЮ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 2 X 1953)

В статье (1) В. П. Потаповым исследована структура голоморфной в единичном круге матрицы-функции $w(\zeta)$, где $\|w(\zeta)\| \leqslant 1$, $\det w(\zeta) \not\equiv 0$ (под нормой матрицы w (квадратной или прямоугольной) в настоящей статье мы будем понимать норму оператора, действующего из одного евклидова пространства, вообще говоря, в другое, которому отвечает при выборе ортонормированных базисов в этих пространствах данная матрица w). В настоящей статье изучается строение ограниченной и голоморфной в единичном круге матрицы-функции $w(\zeta)$, если $\det w(\zeta) \equiv 0$.

1°. Пусть $w(\zeta)$ — голоморфная по норме $\leqslant 1$ в области G функция, каждое значение которой есть оператор, действующий в евклидовом или гильбертовом пространстве H.

Теорема 1. *Пусть при каждом $\zeta \in G$ оператор $w(\zeta)$ отображает H на подпространство L_ζ, причем $\dim(L_\zeta) < \infty$.*

Тогда

1) $\sup \dim(L_\zeta) = r < \infty$.

2) $\dim(L_\zeta) = r$ *для всех* $\zeta \in G - F$, *где* F — *множество, не имеющее предельных точек в* G *(оно может быть пустым). Если* $\zeta \in F$, *то* $\dim(L_\zeta) < r$.

3) $w(\zeta)$ *допускает представление* *

$$\varphi w(\zeta) = \sum_{i=1}^{r} (\varphi, \varphi_i(\zeta)) \psi_i(\zeta), \tag{1}$$

где

а) $\psi_i(\zeta)$ — *голоморфные в* G *вектор-функции* $(i = 1, 2, \ldots, r)$;

б) $\varphi_i(\zeta)$ — *вектор-функции, антиголоморфные*** *в* G;

в) *при каждом* $\zeta \in G - F$ *векторы* $\psi_1(\zeta), \psi_2(\zeta), \ldots, \psi_r(\zeta)$ *линейно независимы;*

г) *при каждом* $\zeta \in G$ *векторы* $\varphi_1(\zeta), \varphi_2(\zeta), \ldots, \varphi_r(\zeta)$ *линейно независимы.*

Число r будем называть функциональным рангом функции $w(\zeta)$.

Теорема 2. *Пусть* $w(\zeta)$ — *голоморфная при* $|\zeta| < 1$ *операторная функция с функциональным рангом* r, $\|w(\zeta)\| \leqslant 1$.

---

* Опраторы будем писать справа от элементов.

** Вектор-функцию $\varphi(\zeta)$ назовем антиголоморфной, если при любом $\varphi \in H$ функция $(\varphi, \varphi(\zeta))$ будет голоморфной.

Тогда $w(\zeta)$ допускает представление

$$w(\zeta) = w_1(\zeta) \cdot w_2(\zeta), \tag{2}$$

где $w_1(\zeta)$ и $w_2(\zeta)$ голоморфны при $|\zeta| < 1$, $\| w_1(\zeta) \| \leqslant 1$, $\| w_2(\zeta) \| \leqslant 1$ при каждом ζ. $w_1(\zeta)$ отображает H на некоторое не зависящее от ζ r-мерное подпространство H_r, $w_2(\zeta)$ отображает H_r на L_ζ.

Доказательство. Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_r$ — произвольная ортонормированная система в H, H_r — натянутое на нее подпространство. Положим $\varphi v_1(\zeta) = \sum_{i=1}^{r} (\varphi, \varphi_i(\zeta)) e_i$ $(\varphi \in H)$, $e_i v_2(\zeta) = \psi_i(\zeta)$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$; $v_1(\zeta)$ и $v_2(\zeta)$ голоморфны при $|\zeta| < 1$; $v_1(\zeta)$ отображает H на H_r; $v_2(\zeta)$ отображает H_r на L_ζ. Очевидно, что $w(\zeta) = v_1(\zeta) v_2(\zeta)$. Из условия $\| w(\zeta) \| \leqslant 1$ вытекает, что

$$v_2(\zeta) v_2^*(\zeta) \leqslant [v_1^*(\zeta) v_1(\zeta)]^{-1}.$$

Пусть $A(\zeta)$ — голоморфная при $|\zeta| < 1$ функция, удовлетворяющая условиям:

а) при каждом ζ $A(\zeta)$ есть оператор, действующий в H_r;

б) $A^{-1}(\zeta)$ существует при всех ζ $(|\zeta| < 1)$ и, следовательно, является голоморфной в единичном круге функцией.

Если положить

$$w_1(\zeta) = v_1(\zeta) A(\zeta), \quad w_2(\zeta) = A^{-1}(\zeta) v_2(\zeta), \tag{3}$$

то $w_1(\zeta)$ и $w_2(\zeta)$ голоморфны при $|\zeta| < 1$; $w_1(\zeta)$ отображает H на H_r; $w_2(\zeta)$ — H_r на L_ζ, причем выполнено (2).

Подберем теперь $A(\zeta)$ так, чтобы

$$\| w_1(\zeta) \| \leqslant 1, \quad \| w_2(\zeta) \| \leqslant 1. \tag{4}$$

Это дает

$$v_2(\zeta) v_2^*(\zeta) \leqslant A(\zeta) A^*(\zeta) \leqslant [v_1^*(\zeta) v_1(\zeta)]^{-1}. \tag{5}$$

Для построения функции $A(\zeta)$, удовлетворяющей требуемым условиям, найдем возрастающую последовательность чисел $\{\rho_n\}$ $\lim\limits_{n \to \infty} \rho_n = 1$, так, что ни одна из окружностей $|\zeta| = \rho_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ не проходит через точки множества F. Пусть $A_n(\zeta)$ — голоморфная при $|\zeta| < \rho_n$ и непрерывная при $|\zeta| \leqslant \rho_n$ функция, каждое значение которой есть оператор в H_r, удовлетворяющая условию

$$A_n(\zeta) A_n^*(\zeta) = v_2(\zeta) v_2^*(\zeta) \quad (|\zeta| = \rho_n),$$

причем $A_n^{-1}(\zeta)$ существует при $|\zeta| \leqslant \rho_n$. Тогда при $m \geqslant n$, $|\zeta| \leqslant \rho_n$, выполнено условие

$$v_2(\zeta) v_2^*(\zeta) \leqslant A_m(\zeta) A_m^*(\zeta) \leqslant [v_1^*(\zeta) v_1(\zeta)]^{-1}. \tag{6}$$

Последовательность $\{A_m(\zeta)\}$ равномерно ограничена внутри единичного круга и, значит, нормальна. Поэтому можно считать, что эта последовательность равномерно сходится внутри единичного круга.

Если $A(\zeta) = \lim\limits_{m \to \infty} A_m(\zeta)$, то $A(\zeta)$ голоморфна внутри единичного круга. Переходя к пределу при $m \to \infty$ в (6), получим, что равенство (5) имеет место при $|\zeta| \leqslant \rho_n$ при всех n, т. е. при $|\zeta| < 1$. Существование $A^{-1}(\zeta)$ вытекает из существования $A_m^{-1}(\zeta)$ и ограниченности при каждом ζ последовательности $\{\| A_m^{-1}(\zeta) \|\}$, которая следует из (6) [2]. Найдя $A(\zeta)$, находим $w_1(\zeta)$ и $w_2(\zeta)$ по формулам (3).

2°. Теорема. 3. *Если $w(\zeta)$ — голоморфная при $|\zeta|<1$ матрица-функция m-го порядка с нормой $\leqslant 1$, $\det w(\zeta)\equiv 0$, то $w(\zeta)=w_1(\zeta)\,w_2(\zeta)$, где $w_1(\zeta)$ и $w_2(\zeta)$ суть голоморфные при $|\zeta|<1$ прямоугольные матрицы-функции с нормами $\leqslant 1$, причем $w_1(\zeta)$ имеет m строк и r столбцов, $w_2(\zeta)$ имеет r строк и m столбцов.*

Здесь r — функциональный ранг операторной функции, задаваемой матрицей-функцией $w(\zeta)$ в m-мерном евклидовом пространстве. Условие $\det w(\zeta)\equiv 0$ дает, что $r<m$. Если $\zeta\,\overline{\in}\,F$, то каждая из матриц $w_1(\zeta)$ и $w_2(\zeta)$ имеет ранг r; если $\zeta\in F$, то ранг по крайней мере одной из матриц $w_1(\zeta)$ или $w_2(\zeta)$ становится меньше r. Пользуясь методом В. П. Потапова ([1]), каждую из матриц $w_1(\zeta)$ и $w_2(\zeta)$ можно представить в виде

$$w_1(\zeta)=\omega_1(\zeta)\,b_1(\zeta),\qquad w_2(\zeta)=b_2(\zeta)\,\omega_2(\zeta), \tag{7}$$

где $b_1(\zeta)$ и $b_2(\zeta)$ — матрицы-функции r-го порядка, являющиеся произведениями Бляшке, $\omega_1(\zeta)$ и $\omega_2(\zeta)$ — голоморфные в единичном круге матрицы-функции того же типа, что $w_1(\zeta)$ и $w_2(\zeta)$, соответственно, с нормами $\leqslant 1$, имеющие ранг r всюду в единичном круге.

Вопрос о структуре $\omega_1(\zeta)$ и $\omega_2(\zeta)$ остается открытым. Заметим, что кроме представления (7) матрицы-функции $w_1(\zeta)$ и $w_2(\zeta)$ допускают также представление:

$$w_1(\zeta)=\tilde b_1(\zeta)\,\tilde\omega_1(\zeta),\qquad w_2(\zeta)=\tilde\omega_2(\zeta)\,\tilde b_2(\zeta),$$

где $\tilde\omega_1(\zeta)$ и $\tilde\omega_2(\zeta)$ удовлетворяют тем же условиям, что $\omega_1(\zeta)$ и $\omega_2(\zeta)$ в (7), $\tilde b_1(\zeta)$ и $\tilde b_2(\zeta)$ — произведения Бляшке m-го порядка.

Житомирский государственный
педагогический институт
им. Ив. Франко

Поступило
22 XII 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. П. Потапов, ДАН, 72, № 5, 849 (1950). [2] Э. Хилл, Функциональный анализ и полугруппы, ИЛ, 1951, стр. 139.