Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XCIII, № 4

МАТЕМАТИКА

С. М. ЛОЗИНСКИЙ

ОБ УРАВНЕНИЯХ В ВАРИАЦИЯХ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 8 VII 1953)

1. Все не поясненные в настоящей работе обозначения определены в [1].

2. Пусть даны:

1) система дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_i}{dt} = f_i(t, y_1, \ldots, y_n), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

где функции f_i принимают вещественные значения и непрерывны вместе со своими частными производными первых двух порядков по y-м в некоторой области G вещественного евклидова пространства переменных $t, y_1, \ldots, y_n$;

2) некоторое решение

$$y_1(t), \ldots, y_n(t), \quad t_0 \leqslant t \leqslant T, \tag{2}$$

системы (1).

Тогда система дифференциальных уравнений

$$\frac{d\eta_i}{dt} = \sum_{k=1}^{n} f_{ik}[t, y_1(t), \ldots, y_n(t)]\,\eta_k, \quad t_0 \leqslant t \leqslant T, \tag{3}$$

называется системой уравнений в вариациях для системы дифференциальных уравнений (1) и ее решения (2).

Пусть требуется определить решение

$$Y_1(t), \ldots, Y_n(t), \quad t_0 \leqslant t \leqslant T,$$

системы (1), заданное своим начальным вектором $\mathbf{Y}(t_0)$. Тогда, если вектор $\mathbf{Y}(t_0) - \mathbf{y}(t_0)$ „мал", то естественно пользоваться приближенной формулой

$$\mathbf{Y}(t) \doteq \mathbf{y}(t) + \vec{\eta}(t),$$

где $\vec{\eta}(t)$ есть решение системы (3), для которого

$$\vec{\eta}(t_0) = \mathbf{Y}(t_0) - \mathbf{y}(t_0).$$

Это хорошо известный способ вычисления решений, „близких" к данному. Мы хотим оценить погрешность этого способа.

3. Определим матрицу $J[t, \mathbf{y}]$ формулами

$$\{J[t, \mathbf{y}]\}_{ik} \equiv f_{ik}(t, \mathbf{y}), \quad i, k = 1, \ldots, n, \quad (t, \mathbf{y}) \in G^*.$$

Тогда система уравнений в вариациях (3) может быть записана в матричной форме

$$\frac{d\vec{\eta}}{dt} = J[t, \mathbf{y}(t)]\,\vec{\eta}, \quad t_0 \leqslant t \leqslant T.$$

4. Пусть:

1) $G^* \subset G$ есть область, выпуклая по y-м, содержащая кривые

$$y_1 = y_1(t), \ldots, y_n = y_n(t), \quad t_0 \leqslant t \leqslant T;$$

$$y_1 = Y_1(t), \ldots, y_n = Y_n(t), \quad t_0 \leqslant t \leqslant T;$$

2) $U(t)$ — матрица класса C' на $[t_0, T]$, неособенная при каждом $t \in [t_0, T]$;

3) $Q_J(t)$ — матрица, определенная формулой

$$Q_J(t) \equiv U^{-1}(t)\,J[t, \mathbf{y}(t)]\,U(t) - U^{-1}(t)\,\frac{dU(t)}{dt};$$

4) $$f_{i\nu\mu}(t, \mathbf{y}) \equiv f_{i\nu\mu}(t, y_1, \ldots, y_n) \equiv \frac{\partial^2 f_i(t, y_1, \ldots, y_n)}{\partial y_\nu\,\partial y_\mu},$$

$$i, \nu, \mu = 1, \ldots, n;$$

5) $\Delta_i(t) \equiv Y_i(t) - y_i(t), \quad i = 1, \ldots, n.$

Из формулы Тейлора следует, что функции $\Delta_i(t)$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\frac{d\Delta_i}{dt} = \sum_{\nu=1}^{n} f_{i\nu}[t, \mathbf{y}(t)]\,\Delta_\nu + \frac{1}{2}\sum_{\nu,\mu=1}^{n} f_{i\nu\mu}[t, \mathbf{y}^i(t)]\,\Delta_\nu\Delta_\mu,$$

где $\mathbf{y}^i(t)$ нам неизвестны, но известно, что $\mathbf{y}^i(t) = \mathbf{y}(t) + \theta_i(t)\,\vec{\Delta}(t)$, $0 < \theta_i(t) < 1$, $t_0 \leqslant t \leqslant T$.

Положим

$$\tau_i(t) \equiv \frac{1}{2}\sum_{\nu,\mu=1}^{n} f_{i\nu\mu}[t, \mathbf{y}^i(t)]\,\Delta_\nu(t)\,\Delta_\mu(t),$$

$$i = 1, \ldots, n, \quad t_0 \leqslant t \leqslant T;$$

$$\vec{\zeta}(t) \equiv U^{-1}(t)\,\vec{\tau}(t), \quad t_0 \leqslant t \leqslant T.$$

5. Теорема 1. *Пусть вещественная матрица $A_J(t)$ непрерывна при $t_0 \leqslant t \leqslant T$ и удовлетворяет следующим условиям*

$$\operatorname{Re}\{Q_J(t)\}_{kk} \leqslant \{A_J(t)\}_{kk}, \quad k = 1, \ldots, n;$$

$$|\{Q_J(t)\}_{ik}| \leqslant \{A_J(t)\}_{ik}, \quad i, k = 1, \ldots, n, \quad i \neq k,$$

где $t_0 \leqslant t \leqslant T$.

Тогда, если $\vec{\varepsilon}(t)$ есть решение системы

$$\frac{d\vec{\varepsilon}}{dt} = A_J(t)\,\vec{\varepsilon} + |\vec{\zeta}(t)| \tag{4}$$

такое, что $\vec{\varepsilon}(t_0) = 0$, *то*

$$|\mathbf{Y}(t) - \mathbf{y}(t) - \vec{\eta}(t)| \leqslant |U(t)|\,\vec{\varepsilon}(t).$$

Замечание. Утверждение теоремы останется верным, если мы заменим в системе (4) вектор $|\vec{\zeta}(t)|$ на какой-либо другой, компоненты которого неотрицательны и не меньше компонент вектора $|\vec{\zeta}(t)|$. Другими словами, для применения теоремы 1 достаточно уметь оценивать компоненты вектора $|\vec{\zeta}(t)|$ сверху. Это можно сделать следующим образом. Так как

$$|\tau_k(t)| \leqslant \frac{1}{2} \sum_{\nu,\mu=1}^{n} |f_{k\nu\mu}[t, \mathbf{y}^k(t)]| \, |\Delta_\nu(t)| \, |\Delta_\mu(t)|,$$

то мы оценим сверху $|\tau_k(t)|$ если:

а) найдем функции $p_{k\nu\mu}(t)$ такие, что $|f_{k\nu\mu}(t, \mathbf{y})| \leqslant p_{k\nu\mu}(t)$ при $t_0 \leqslant t \leqslant T$, $(t, \mathbf{y}) \in G^*$, $k, \nu, \mu = 1, \ldots, n$;

б) оценим $|\Delta_\nu(t)|$, $\nu = 1, \ldots, n$, сверху.

Ясно, как выполнить а); для выполнения б) пригодны теоремы 1, 2, 3, 4 из ([1]). После того как компоненты вектора $|\vec{\tau}(t)|$ оценены, мы оцениваем компоненты вектора $|\vec{\zeta}(t)|$, пользуясь неравенством $|\vec{\zeta}(t)| \leqslant |U^{-1}(t)| \, |\vec{\tau}(t)|$.

Теорема 2. *Пусть*:

а) *функция* $p(t)$ *непрерывна при* $t_0 \leqslant t \leqslant T$ *и*

$$\frac{1}{2} \sum_{\nu,\mu=1}^{n} |f_{k\nu\mu}(t, \mathbf{y})| \leqslant p(t) \quad \text{при } t_0 \leqslant t \leqslant T, \quad (t, \mathbf{y}) \in G^*, \ k=1,\ldots,n;$$

б) *функция* $\gamma_J(t)$ *непрерывна при* $t_0 \leqslant t \leqslant T$ *и*

$$\operatorname{Re}\{Q_J(t)\}_{kk} + \sum_{\nu \neq k} |\{Q_J(t)\}_{k\nu}| \leqslant \gamma_J(t)$$

при $t_0 \leqslant t \leqslant T$, $k = 1, \ldots, n$.

Тогда

$$\| \mathbf{Y}(t) - \mathbf{y}(t) - \vec{\eta}(t) \|_{\mathrm{I}} \leqslant \| U^{-1}(t_0) \vec{\Delta}(t_0) \|_{\mathrm{I}}^2 \times \| U(t) \|_{\mathrm{I}} \times$$
$$\times \int_{t_0}^{t} p(\xi) \| U^{-1}(\xi) \|_{\mathrm{I}} \| U(\xi) \|_{\mathrm{I}}^2 \exp\left[2 \int_{t_0}^{\xi} \gamma(u)\, du + \int_{\xi}^{t} \gamma_J(u)\, du\right] d\xi.$$

Теорема 3. *Пусть*:

а) *функции* $q_k(t)$, $k = 1, \ldots, n$, *непрерывны при* $t_0 \leqslant t \leqslant T$ *и*

$$|f_{k\nu\mu}(t, \mathbf{y})| \leqslant q_k(t), \quad \text{при } t_0 \leqslant t \leqslant T, \quad (t, \mathbf{y}) \in G^*,$$
$$k, \nu, \mu = 1, \ldots, n;$$

б) *функция* $\gamma'_J(t)$ *непрерывна при* $t_0 \leqslant t \leqslant T$ *и*

$$\operatorname{Re}\{Q_J(t)\}_{kk} + \sum_{\nu \neq k} |\{Q_J(t)\}_{\nu k}| \leqslant \gamma'_J(t)$$

при $t_0 \leqslant t \leqslant T$, $k = 1, \ldots, n$.

Тогда

$$\| \mathbf{Y}(t) - \mathbf{y}(t) - \vec{\eta}(t) \|_{\mathrm{II}} \leqslant \frac{1}{2} \| U^{-1}(t_0) \vec{\Delta}(t_0) \|_{\mathrm{II}}^2 \times \| U(t) \|_{\mathrm{II}} \times$$
$$\times \int_{t_0}^{t} \| q(\xi) \|_{\mathrm{II}} \| U^{-1}(\xi) \|_{\mathrm{II}} \| U(\xi) \|_{\mathrm{II}}^2 \exp\left[2 \int_{t_0}^{\xi} \gamma(u)\, du + \int_{\xi}^{t} \gamma'_J(u)\, du\right] d\xi.$$

Теорема 4. *Пусть*:

а) *функции* $q_k(t)$, $k=1,\ldots,n$, *непрерывны при* $t_0 \leqslant t \leqslant T$ *и при* $(t, \mathbf{y}) \in G^*$ *для всякой системы вещественных чисел* $\xi_1, \ldots, \xi_n$ *такой, что* $\sum_{\nu=1}^{n} \xi_\nu^2 = 1$, *выполняется неравенство*

$$\left| \sum_{\nu,\mu=1}^{n} f_{k\nu\mu}(t, \mathbf{y})\, \xi_\nu \xi_\mu \right| \leqslant q_k(t);$$

б) *функция* $\tilde{\gamma}_J(t)$ *непрерывна при* $t_0 \leqslant t \leqslant T$ *и при* $t \in [t_0, T]$ *для всякого вектора* $\vec{\varphi}$ *такого, что* $\|\vec{\varphi}\|_{\mathrm{III}} = 1$ *и* $U(t)\vec{\varphi}$ *есть вещественный вектор, выполняется неравенство*

$$\operatorname{Re} \sum_{\nu,\mu=1}^{n} \{Q_J(t)\}_{\nu\mu}\, \varphi_\mu \overline{\varphi}_\nu \leqslant \tilde{\gamma}_J(t).$$

Тогда

$$\|\mathbf{Y}(t) - \mathbf{y}(t) - \vec{\eta}(t)\|_{\mathrm{III}} \leqslant \frac{1}{2} \times \|U^{-1}(t_0)\vec{\Delta}(t_0)\|_{\mathrm{III}}^2 \times \|U(t)\|_{\mathrm{III}} \times$$
$$\times \int_{t_0}^{t} \|\mathbf{q}(\xi)\|_{\mathrm{III}} \|U^{-1}(\xi)\|_{\mathrm{III}} \|U(\xi)\|_{\mathrm{III}}^2 \exp\left[2\int_{t_0}^{\xi} \tilde{\gamma}(u)\,du + \int_{\xi}^{t} \tilde{\gamma}_J(u)\,du\right] d\xi.$$

Поступило
30 VI 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. М. Лозинский, ДАН, **92**, № 2 (1953).