Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XCIII, № 4

МАТЕМАТИКА

М. Г. КРЕЙН

О НЕКОТОРЫХ СЛУЧАЯХ ЭФФЕКТИВНОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЛОТНОСТИ НЕОДНОРОДНОЙ СТРУНЫ ПО ЕЕ СПЕКТРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 9 X 1953)

Хотя в изучении проблемы восстановления одномерной краевой задачи второго порядка по ее спектральной функции в самое последнее время достигнуты значительные успехи ([1–6]), тем не менее до сих пор отсутствуют приемы эффективного решения этой проблемы для спектральных функций какого-либо пусть и специального, но достаточно широкого класса.

Настоящая заметка имеет целью в какой-то мере восполнить этот пробел (для случая краевых задач с положительным спектром).

1. Пусть S — некоторая струна, натянутая единичной силой между концами $x=0$ и $x=L$ $(\leqslant\infty)$. Обозначим через $M(x)$ массу открытого справа отрезка $[0, x)$ $(0<x<L)$ струны S и положим $M(0)=0$. Допуская существование у функции $M(x)$ интервалов постоянства, мы вместе с тем предположим, что $M(x)>0$ при $x>0$. Кроме того, предположим, что струна S не несет на своем правом конце сосредоточенной массы, а следовательно, ее полная масса $M(L)$ $(\leqslant\infty)$ является пределом $M(x)$ при $x\to L$.

Если струна совершает поперечные свободные гармонические колебания по закону $Y(x, t)=y(x)\sin\sqrt{\lambda}t$, то амплитудная функция $y(x)$ будет удовлетворять уравнению:

$$y(x)=y(0)+y'(-0)\,x-\lambda\int\limits_0^x (x-s)\,y(s)\,dM(s)\quad (0\leqslant x<L),\tag{1}$$

где $y'(-0)$ — некоторая константа. Эта константа будет совпадать с $y'(0)=y'(+0)$ в том и только в том случае, когда $M(+0)=0$.

Обозначим через $\varphi(x;\lambda)$ и $\psi(x;\lambda)$ решения уравнения (1), соответственно, при $y(0)=1$, $y'(-0)=0$ и $y(0)=0$, $y'(-0)=1$. Тогда (см. ([4])):

$$\Gamma(\lambda)=\lim_{x\to L}\frac{\psi(x;\lambda)}{\varphi(x;\lambda)}=\int\limits_0^\infty\frac{d\tau(t)}{t-\lambda}\quad (\lambda\,\overline{\in}\,(0,\infty)),$$

где $\tau(t)=\tau(t-0)$ $(0\leqslant t<\infty;\ \tau(0)=0)$ — некоторая неубывающая функция, которая в дальнейшем будет именоваться **главной спектральной функцией струны** S.

Если представить себе, что правый конец струны S неподвижно закреплен, а левый может свободно скользить по направлению, перпендикулярному к оси X, то $\Gamma(\lambda)$ будет **коэффициентом динамической податливости** (сокращенно: к. д. п.) струны S (см. ([6])). Если струна S конечна $(L<\infty)$ и ее масса конечна $(M(L)<\infty)$, причем $0<M(x)<M(L)$ при $0<x<L$, то любая ее ортогональная

спектральная функция с положительным спектром является одновременно главной спектральной функцией некоторой струны S^*, получающейся удлинением S на некоторый отрезок без массы.

Теорема 1. *Для того чтобы неубывающая функция* $\tau(\lambda)$ $(0 \leqslant \lambda < \infty;\ \tau(0) = 0)$ *была главной спектральной функцией некоторой струны* S, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\int_0^\infty \frac{d\tau(\lambda)}{1+\lambda} < \infty.$$

При выполнении этого условия струна S *(т. е. ее функция* $M(x)$*) однозначно определяется функцией* $\tau(\lambda)$.

Эта теорема входит составной частью в теорему 5 из ([4]), которая, однако, сформулирована неточно (она сформулирована для ортогональных спектральных функций вместо главных).

Отметим следующие соотношения:

$$L = \int_0^\infty \frac{d\tau(\lambda)}{\lambda}, \quad \tau(\infty) = \frac{1}{M(+0)},$$

а если $LM(L) = \infty$, то также $M(L) = 1/\tau(+0)$.

2. Пусть S и S^* — две различные структуры, соответственно, длин L и L^*, с функциями распределения масс $M(x)$ и $M^*(x)$ и главными спектральными функциями $\tau(\lambda)$ и $\tau^*(\lambda)$.

Теорема 2. *Имеют место следующие правила сравнения*:

1°. *Если* $\tau^*(\lambda) = \tau(k\lambda)$ $(k > 0)$, *то* $L = kL^*$, $M^*(x) = M(k^{-1}x)$.

2°. *Если* $\tau^*(\lambda) = k\tau(\lambda)$ $(k > 0)$, *то* $L^* = kL$, $M^*(x) = k^{-1}M(k^{-1}x)$.

3°. *Если* $\tau^*(\lambda) = \tau(\lambda) + \delta$ $(0 < \lambda < \infty;\ \delta \geqslant -\tau(+0))$, *то*

$$M^*(x) = \frac{M(\xi)}{1 - \delta M(\xi)}, \quad x = \int_0^\xi [1 - \delta M(s)]^2\, ds \quad (0 \leqslant \xi < L). \tag{2}$$

4°. *Если* $\tau^*(\lambda) = \tau(\lambda - a)$ *при* $a \leqslant \lambda < \infty$ $(a > 0)$, *то*

$$M^*(x) = \int_0^\xi \varphi^2(s; -a)\, dM(s), \quad x = \frac{\psi(\xi; -a)}{\varphi(\xi; -a)} \quad (0 \leqslant \xi < L). \tag{3}$$

5°. *Если* $\tau^*(\lambda) = \int_0^\lambda (\mu + a)\, d\tau(\mu)$ $(0 \leqslant \lambda < \infty)$, *где* $a \geqslant 0$, *то*

$$M^*(x) = \frac{1}{a^2}\int_0^\xi \frac{\varphi'^2(s; -a)}{\varphi^2(s; -a)}\, ds, \quad x = a^2 \int_0^\xi \frac{\varphi^2(x; -a)\, dM(x)}{\varphi'(x-0; a)\, \varphi'(x+0; a)}. \tag{4}$$

Смысл последних равенств при $a = 0$ выясняется путем раскрытия неопределенности, что дает

$$M^*(x) = \int_0^\xi M^2(s)\, ds, \quad x = \frac{1}{M(+0)} - \frac{1}{M(\xi)}. \tag{5}$$

Заметим, что, если правило 5° выведено для частного случая $a = 0$, то для общего случая оно уже легко получится на основании правила 4°, которое, кстати, сохраняет смысл также и для $a < 0$, если $\tau(-a) = 0$.

Соотношения (2), (3), (4) и (5) имеют вид:

$$M^*(x) = f(\xi), \quad x = g(\xi) \quad (0 \leqslant \xi < L),$$

где f, g — некоторые неубывающие непрерывные слева функции, причем, по крайней мере, одна из них непрерывна и слева. Поясним, что, если ξ_0 является точкой скачка функции g, то это следует понимать как то, что интервал $g(\xi_0 - 0) < x \leqslant g(\xi_0 + 0)$ является интервалом постоянства функции $M^*(x)$; если же некоторый интервал $[\xi_1, \xi_2]$ является интервалом постоянства функции g $(g(\xi) < g(\xi_1) = g(\xi_2) < g(\eta)$ при $\xi < \xi_1 < \xi_2 < \eta)$, то это означает, что в точке $x_1 = g(\xi_1)$ у струны S имеется сосредоточенная масса: $M(x_1 + 0) - M(x_1 - 0) = f(\xi_2) - f(\xi_1)$.

Заметим, что правила $1° - 5°$ являются обобщением некоторых результатов, найденных еще Стилтьесом (см. [7], гл. X). Получаются эти правила путем построения явного выражения функций φ, ψ струны S^* через функции φ, ψ струны S по заданной зависимости между τ и τ^*.

3. Пусть $\Gamma_\xi(\lambda)$ $(0 < \xi < L)$ означает к. д. п. части $[\xi, L)$ струны S. Тогда оказывается:

$$\Gamma(\lambda) = \frac{\psi'(\xi \pm 0; \lambda)\Gamma_{\xi \pm 0}(\lambda) + \psi(\xi; \lambda)}{\varphi'(\xi \pm 0; \lambda)\Gamma_{\xi \pm 0}(\lambda) + \varphi(\xi; \lambda)}. \tag{6}$$

Пользуясь этим, найдем струну S со спектральной плотностью

$$\frac{d\tau}{d\lambda} = \frac{1}{\pi\sqrt{\lambda}Q(\lambda)} \quad (0 \leqslant \lambda < \infty), \tag{7}$$

где $Q(\lambda)$ — многочлен, положительный при $\lambda \geqslant 0$ и $Q(0) = 1$.

В силу одного результата А. А. Маркова ([8], стр. 258—273) по многочлену $Q(\lambda)$ однозначно определяются многочлены $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ с неотрицательными простыми и перемежающимися нулями такие, что $\lambda Q(\lambda) = A^2(\lambda) + \lambda B^2(\lambda)$. Для B/A будем иметь разложение в непрерывную стилтьесовскую дробь:

$$\frac{B(-\lambda)}{A(-\lambda)} = l_p + \frac{1|}{|m_p\lambda} + \frac{1|}{|l_{p-1}} + \frac{1|}{|m_{p-1}\lambda} + \ldots + \frac{1|}{|l_1} + \frac{1|}{|m_1\lambda},$$

где p — степень $A(\lambda)$, $l_p \geqslant 0$, а все прочие l_k и m_j $(k = 1, 2, \ldots, p-1;$ $j = 1, 2, \ldots, p)$ положительны.

Рассмотрим струну S_Q, отрезок $[0, l]$ $(l = l_1 + l_2 + \ldots + l_p)$ которой представляет собой нить, несущую массы $m_1, m_2, \ldots, m_p$, сосредоточенные, соответственно, в точках $x_1 = 0$, $x_2 = l_1$, $x_3 = l_1 + l_2, \ldots$ $\ldots, x_p = l_1 + l_2 + \ldots + l_{p-1}$, а отрезок (l, ∞) есть однородная струна единичной плотности.

Так как $\varphi\psi' - \psi\varphi' \equiv 1$ и для этой струны $\varphi'(l+0; \lambda) = A(\lambda)$, $\varphi(l; \lambda) = B(\lambda)$, а $\Gamma_l(\lambda) = i/\sqrt{\lambda}$, то по формуле обращения Стилтьеса легко находим из (6), что у струны S_Q спектральная функция $\tau(\lambda)$ определяется формулой (7).

Применяя далее правило 5°, можно построить струну со спектральной плотностью:

$$\frac{d\tau}{d\lambda} = \frac{P(\lambda)}{\pi\sqrt{\lambda}Q(\lambda)} \quad (0 \leqslant \lambda < \infty), \tag{8}$$

где $Q(\lambda)$ — многочлен, положительный при $\lambda \geqslant 0$, а $P(\lambda)$ — многочлен с вещественными неотрицательными нулями степени не высшей чем Q. Если степени P и Q равны, то соответствующая функция $M(x)$ будет аналитической; в противном случае она будет иметь конечное число точек скачков и будет аналитической на интервалах между этими точками.

Так например, если

$$\frac{d\tau}{d\lambda}=\frac{\sqrt{\lambda}}{\pi(1+h\lambda)};\quad \frac{\lambda\sqrt{\lambda}}{\pi(a\lambda^2+b\lambda+1)}\quad (0\leqslant\lambda<\infty),$$

то, соответственно, находим: $L=1/h;\ 1/m^2l$ и

$$\frac{dM}{dx}=\left(\frac{h}{1-hx}\right)^4;\quad \left(\frac{m^2l}{1-m^2lx}\right)^4\frac{1}{(m+s)^2(m+l+s)^2},$$

где

$$m=\sqrt{2\sqrt{a}+b},\quad l=\sqrt{a}/m,\quad s=\sqrt[3]{(m+l)^3+\frac{3m^4l^2x}{1-m^4l^2x}}-m-l.$$

Следующий интересный пример получается, если выбрать в качестве P/Q дробно-линейную функцию. Пусть, например:

$$\frac{d\tau}{d\lambda}=\frac{1}{\pi}\frac{\lambda+1}{1+m^2\lambda}\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\quad (0\leqslant\lambda<\infty;\ m>0). \tag{9}$$

Вычислив соответствующую функцию $M(x)$ и затем преобразовав известным способом уравнение струны $y''+\lambda\rho y=0$ ($\rho=dM/dx$) к виду $y''+qy+\lambda y=0$, мы найдем, что равенством (9) определяется спектральная функция дифференциальной системы

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{2(1-m^2)}{(\operatorname{ch}x+m\operatorname{sh}x)^2}y+\lambda y=0,\quad my'(0)+(m^2-1)y(0)=0.$$

Это утверждение справедливо также при $m=0$. Впрочем, написанное дифференциальное уравнение имеет линейно-независимые решения:

$$y=e^{\pm i\sqrt{\lambda}x}\left(\frac{\operatorname{sh}x+m\operatorname{ch}x}{\operatorname{ch}x-m\operatorname{sh}x}\pm i\sqrt{\lambda}\right)$$

и поэтому без труда может быть вычислена его спектральная функция, отвечающая любому граничному условию.

За недостатком места мы опускаем ряд интересных примеров на комбинированное применение правил 3°, 4°.

Поступило
22 IX 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. В. Марченко, Тр. Московск. матем. об-ва, **1** (1952). [2] И. М. Гельфанд, Б. М. Левитан, Изв. АН СССР, сер. матем., **15** (309) (1951). [3] М. Г. Крейн, ДАН, **82**, № 5 (1952). [4] М. Г. Крейн, ДАН, **87**, № 6 (1952). [5] М. Г. Крейн, ДАН, **88**, № 3 (1952). [6] М. Г. Крейн, Прикл. матем. и мех., **16**, № 5 (1952). [7] Т. Стилтьес, Исследование о непрерывных дробях, 1936. [8] А. А. Марков, Избр. тр., 1948.