Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XCIII, № 4

МАТЕМАТИКА

Ф. И. КАРПЕЛЕВИЧ

КЛАССИФИКАЦИЯ ПРОСТЫХ ПОДАЛГЕБР ВЕЩЕСТВЕННЫХ ФОРМ КЛАССИЧЕСКИХ АЛГЕБР

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 24 IX 1953)

Пусть R — вещественная алгебра Ли. Рассмотрим векторы $x+iy$, $x \in R$, $y \in R$, и определим для них операцию коммутирования следующей формулой:

$$(x+iy)\circ(x'+iy') = x\circ x' - y\circ y' + i\,(x\circ y' + y\circ x').$$

Таким образом мы связываем с каждой вещественной алгеброй R комплексную алгебру Ли, которую мы будем обозначать через $[R]$.

Вещественные формы полупростых алгебр классифицированы Картаном ([1]), а также Гантмахером ([2]). В основе этой классификации лежит конструкция, указанная Картаном, которая устанавливает взаимнооднозначное соответствие между классами сопряженных вещественных форм данной комплексной полупростой алгебры G и классами сопряженных инволютивных автоморфизмов алгебры G. Пусть G — вещественная форма полупростой алгебры R. Мы будем обозначать через $\mathfrak{R}(G)$ класс вещественных форм R, сопряженных G, а через $\mathfrak{M}(G)$ — соответствующий ему в конструкции Картана класс сопряженных инволютивных автоморфизмов.

Пусть теперь G и R — вещественные полупростые алгебры Ли и пусть $[G]\subset[R]$. Мы будем писать $\mathfrak{R}(G)\subset\mathfrak{R}(R)$, если для каждой алгебры $G'\in\mathfrak{R}(G)$ найдется алгебра $R'\subset\mathfrak{R}(R)$ такая, что $G'\subset R'$; будем также писать $\mathfrak{M}(G)\subset\mathfrak{M}(R)$, если для любого автоморфизма $s\in\mathfrak{M}(G)$ найдется автоморфизм $S\in\mathfrak{M}(R)$, переводящий $[G]$ в себя и совпадающий на $[G]$ с s.

Теорема 1. *Пусть G и R — вещественные формы полупростых алгебр, соответственно, $[G]$ и $[R]$ и пусть $[G]\subset[R]$. Для того чтобы $\mathfrak{R}(G)\subset\mathfrak{R}(R)$, необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{M}(G)\subset\mathfrak{M}(R)$.*

Пусть G — подалгебра алгебры R. Назовем G неприводимой подалгеброй алгебры R, если не существует внутреннего автоморфизма алгебры $[R]$, отличного от единичного, который оставляет на месте каждый элемент алгебры $[G]$. В случае, когда R — алгебра матриц, в силу леммы Шура, наше определение неприводимости совпадает с обычным.

Пусть φ — представление алгебры G в алгебру R. Если алгебра $\varphi(G)$ является неприводимой подалгеброй алгебры R, то мы будем называть представление φ неприводимым.

Пусть G_1 и G_2 — вещественные формы полупростой комплексной алгебры R. Отнесем эти алгебры к одному типу, если множества $\mathfrak{M}(G_1)$ и $\mathfrak{M}(G_2)$ состоят из автоморфизмов, принадлежащих к одной и той же компоненте связности группы автоморфизмов алгебры R.

Теорема 2. *Пусть G — вещественная форма полупростой алгебры $[G]$ и φ — неприводимое представление алгебры $[G]$ в полупростую комплексную алгебру R. Алгебра $\varphi(G)$ может содержаться не более чем в одной вещественной форме данного типа алгебры R.*

Вещественные формы классических алгебр описываются следующим образом ([1, 2]). (Классическими алгебрами мы называем алгебру $SL(n)$ — матриц n-го порядка со следом нуль; алгебру $O(n)$ — матриц n-го порядка, оставляющих инвариантной квадратичную форму $\sum\limits_{1}^{n} x_j^2$, и алгебру $Sp(n)$ — матриц n-го порядка, оставляющих инвариантной билинейную кососимметричную форму $\sum\limits_{j=1}^{n/2}(x_j y_{n-j+1} - x_{n-j+1} y_j)$; здесь $n \equiv 0 \pmod 2$.)

Алгебра $SL(n)$. 1) Алгебра матриц n-го порядка, оставляющих инвариантной эрмитову форму $\sum\limits_{1}^{k} x_j\bar{y}_j - \sum\limits_{k+1}^{n} x_j\bar{y}_j$ $\left(k = 0, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]\right)$. Эти алгебры мы будем обозначать через $SL(n)^\sigma$, где $\sigma = n - 2k$.

2) Алгебра $I(n)$ действительных матриц n-го порядка со следом нуль.

Этим исчерпываются все вещественные формы алгебры $SL(n)$ при $n \equiv 1 \pmod 2$. В случае, если $n \equiv 0 \pmod 2$, к вышеперечисленным алгебрам добавляется еще:

3) Алгебра $J(n)$, состоящая из матриц a n-го порядка со следом нуль таких, что $s^{-1}\bar{a}s = a$, где $\bar{a}$ — матрица, комплексно сопряженная матрице a, $s = \sum\limits_{j=1}^{n/2}(e_{j\,n-j+1} - e_{n-j+1\,j})$, e_{ij} — матрица n-го порядка, у которой на пересечении i-й строки и j-го столбца стоит 1, а остальные элементы нули. Алгебра $J(n)$ изоморфна алгебре линейных преобразований векторного $\frac{n}{2}$-мерного пространства над телом кватернионов.

Алгебра $O(n)$. 1) Алгебра $O(n)^\sigma = SL(n)^\sigma \cap O(n)$. Этим исчерпываются все вещественные формы алгебры $O(n)$ при $n \equiv 1 \pmod 2$. В случае, если $n \equiv 0 \pmod 2$, добавляется еще:

2) Алгебра $JO(n) = J(n) \cap SL(n)^0$. Здесь под алгеброй $O(n)$ нам удобно подразумевать алгебру матриц, оставляющих инвариантной квадратичную форму $\sum\limits_{j=1}^{n} x_j x_{n-j+1}$.

Алгебра $Sp(n)$. 1) Алгебра $Sp(n)^\sigma = SL(n)^\sigma \cap Sp(n)$.

2) Алгебра $ISp(n) = SL(n)^0 \cap Sp(n)$. Алгебра $ISp(n)$ сопряжена алгебре действительных симплектических матриц и переводится в нее внутренним автомофизмом, порожденным матрицей $E - i\sum\limits_{1}^{n} e_{j\,n-j+1}$, где E — единичная матрица.

Пусть R — подалгебра алгебры $SL(n)$. Будем обозначать через $\mathfrak{S}(R)$ множество подалгебр $SL(n)$, сопряженных алгебре R. Пусть R_1 и R_2 — две подалгебры алгебры $SL(n)$. Будем писать $\mathfrak{S}(R_1) \subset \mathfrak{S}(R_2)$, если для любой алгебры $R_1' \in \mathfrak{S}(R_1)$ найдется алгебра $R_2' \in \mathfrak{S}(R_2)$ такая, что $R_1' \subset R_2'$.

Пусть G — вещественная форма простой алгебры $[G]$ и φ — неприводимое представление G в $SL(n)$.

Результаты исследования о вложении алгебры $\varphi(G)$ в вещественные формы алгебры $SL(n)$ опубликованы в ([3]). Перейдем теперь к результатам исследования вопроса о вложении алгебры $\varphi(G)$ в вещественные формы алгебр $O(n)$ и $Sp(n)$.

Теорема 3. *Для того чтобы $\mathfrak{S}(\varphi(G)) \subset \mathfrak{S}(O(n)^\sigma)$, необходимо и достаточно, чтобы представление φ было ортогональным, $\mathfrak{S}(\varphi(G)) \subset \mathfrak{S}(SL(n)^\sigma)$* и $\mathfrak{S}(\varphi(G)) \subset \mathfrak{S}(I(n))$.

Теорема 4. *Для того чтобы $\mathfrak{S}(\varphi(G)) \subset \mathfrak{S}(JO(n))$, необходимо и достаточно, чтобы представление φ было ортогональным и $\mathfrak{S}(\varphi(G)) \subset \mathfrak{S}(J(n))$.*

Теорема 5. *Для того чтобы $\mathfrak{S}(\varphi(G)) \subset \mathfrak{S}(Sp(n)^\sigma)$, необходимо и достаточно, чтобы представление φ было симплектическим, $\mathfrak{S}(\varphi(G)) \subset \mathfrak{S}(SL(n)^\sigma)$ и $\mathfrak{S}(\varphi(G)) \subset \mathfrak{S}(J(n))$.*

Теорема 6. *Для того чтобы $\mathfrak{S}(\varphi(G)) \subset \mathfrak{S}(ISp(n))$, необходимо и достаточно, чтобы представление φ дыло симплектическим и $\mathfrak{S}(\varphi(G)) \subset \mathfrak{S}(I(n))$.*

Пусть f_1 и f_2 — два представления алгебры G в R. Мы скажем, что автоморфизм s алгебры R переводит представление f_2 в f_1, если $f_1(g) = sf_2(g)$ для всех $g \in G$. Всякий автоморфизм алгебры R естественно продолжается в автоморфизм алгебры $[R]$. Будем называть представления f_1 и f_2 алгебры G в алгебру R квази-эквивалентными, если найдется автоморфизм алгебры R, являющийся внутренним автоморфизмом алгебры $[R]$, который переводит f_2 в f_1. Пусть f — представление алгебры G в алгебру R. Представление f продолжается линейно в представление алгебры $[G]$ в алгебру $[R]$. Это представление мы будем обозначать через $[f]$. Из теоремы 2 легко следует:

Теорема 7. *Если f_1 и f_2 — два неприводимых представления алгебры G в алгебру R, причем представления $[f_1]$ и $[f_2]$ алгебры $[G]$ в алгебру $[R]$ эквивалентны, то представления f_1 и f_2 квази-эквивалентны.*

Результатами, изложенными в ([3]), и теоремами 3—7 исчерпывается классификация неприводимых простых подалгебр вещественных форм классических алгебр.

Пусть теперь φ — произвольное представление полупростой алгебры $[G]$ в $SL(n)$. Всякое представление полупростой алгебры вполне приводимо и его можно представить в виде ([4])

$$\varphi = m_1\varphi_1 + m_2\varphi_2 + \ldots + m_p\varphi_p,$$

где $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ — попарно неэквивалентные неприводимые представления алгебры $[G]$. (Мы пишем $f \backsim m\psi$, если представление f разлагается на сумму m представлений, каждое из которых эквивалентно ψ.)

Теорема 8. *Для того чтобы множество $\mathfrak{S}(\varphi(G))$ содержалось хотя бы в одном из множеств $\mathfrak{S}(SL(n)^\sigma)$, необходимо и достаточно, чтобы $\varphi \backsim \varphi s$, где $s \in \mathfrak{M}(G)$, или, что равносильно, для всякого целого числа i $(1 \leqslant i \leqslant p)$ существует число $j(i)$ такое, что $m_i = m_j$ и $\varphi_j \backsim \varphi_i s$.*

Занумеруем представления $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ так, чтобы $j(i) = i$ для $i = 1, \ldots, r$ и $j(i) \neq i$ для $i = r+1, \ldots, p$.

Представление f алгебры G в алгебру $Sl(n)^\sigma$ такое, что $[f] \backsim \varphi$, с точностью до квази-эквивалентности определяется старшим весом представления φ и набором чисел $q_1, \ldots, q_r$, который рассматривается с точностью до перемены знака у всех q_i одновременно; здесь q_i — произвольные целые числа, удовлетворяющие условиям $|q_i| \leqslant m_i$, $q_i \equiv m_i \pmod 2$. При этом индекс σ алгебры $SL(n)^\sigma$ может быть вычислен по формуле $\sigma = \left|\sum_1^r q_i\sigma_i\right|$, где σ_i — индексы *алгебр* $SL(n_i)^{\sigma_i}$ *таких, что* $\mathfrak{S}(\varphi_i(G)) \subset \mathfrak{S}(SL(n_i)^{\sigma_i})$. (Подразумевается, что φ_i есть представление $[G]$ в $SL(n_i)$.)

Теорема 9. *Для того чтобы* $\mathfrak{S}(\varphi(G)) \subset \mathfrak{S}(I(n))$ *или* $\mathfrak{S}(\varphi(G)) \subset \mathfrak{S}(J(n))$, *необходимо, чтобы* $\varphi s \backsim \hat{\varphi}$, *где* $s \in \mathfrak{M}(G)$, *или, что равносильно, для каждого целого числа* i $(1 \leqslant i \leqslant p)$ *существует число* $k(i)$ *такое, что* $m_i = m_k$ *и* $\hat{\varphi}_k \backsim \varphi_i s$. (Через $\hat{\psi}$ мы обозначаем представление, контраградиентное представлению ψ.)

Занумеруем представления $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ так, чтобы $k(i) = i$ для $i = 1, \ldots, \tilde{p}$ и $k(i) \neq i$ для $i = \tilde{p} + 1, \ldots, p$. Пусть при этой нумерации $m_i \equiv 1 \pmod 2$ для $i = 1, \ldots, l$ и $m_i \equiv 0 \pmod 2$ для $i = l + 1, \ldots, \tilde{p}$.

Для того чтобы $\mathfrak{S}(\varphi(G)) \subset \mathfrak{S}(I(n))$ *или* $\mathfrak{S}(\varphi(G)) \subset \mathfrak{S}(J(n))$, *необходимо и достаточно, чтобы* $\mathfrak{S}(\varphi_i(G)) \subset \mathfrak{S}(I(n_i))$ *или, соответственно,* $\mathfrak{S}(\varphi_i(G)) \subset \mathfrak{S}(J(n_i))$ *для всех* $i = 1, \ldots, l$. *Представление* f *алгебры* G *в алгебру* $I(n)$ *(соответственно в* $J(n)$*) с точностью до квази-эквивалентности определяется старшим весом представления* $[f]$.

Легко видеть, что всякая вещественная форма R алгебр $O(n)$ и $Sp(n)$ содержится в некоторой алгебре R^*, сопряженной одной из алгебр $SL(n)^\sigma$. Так, алгебры $O(n)^\sigma$ и $Sp(n)^\sigma$ содержатся в алгебре $SL(n)^\sigma$, а алгебры $JO(n)$ и $ISp(n)$ — в $SL(n)^0$. Отсюда следует, что всякое представление f алгебры G в алгебру R порождает некоторое представление алгебры G в алгебру R^*, которое мы также будем обозначать через f. Поэтому для того, чтобы найти все представления алгебры G в алгебру R, достаточно выделить из всевозможных представлений G в алгебру R^* те, которые порождены представлениями в R.

Теорема 10. *Пусть* f_1 *и* f_2 — *два представления алгебры* G *в алгебру* R. *Если представления* f_1 *и* f_2 *алгебры* G *в алгебру* R^* *квази-эквивалентны, то представление* f_2 *переводится в представление* f_1 *автоморфизмом алгебры* R.

Теорема 11. *Пусть* f — *представление алгебры* G *в* $SL(n)^\sigma$. *Положим* $\varphi = [f]$ *и пусть* $q_1, \ldots, q_r$ — *набор чисел, определяющий согласно теореме* 8 *вместе со старшим весом представления* φ *представление* f. *Для того чтобы* f *было квази-эквивалентно некоторому представлению, порожденному представлением алгебры* G *в* $O(n)^\sigma$, *необходимо и достаточно, чтобы представление* φ *было ортогональным и:*

1) $q_i = 0$, *если* φ_i *ортогонально и* $\mathfrak{S}(\varphi_i(G)) \subset \mathfrak{S}(J(n_i))$;
2) $q_i = 0$, *если* φ_i *симплектично и* $\mathfrak{S}(\varphi_i(G)) \subset \mathfrak{S}(I(n_i))$;
3) $q_i \equiv m_i \pmod 4$, *если* φ_i *симплектично и* $\mathfrak{S}(\varphi_i(G)) \subset \mathfrak{S}(J(n_i))$;
4) $q_i = q_k$, *где число* k *определяется соотношением* $\varphi_k \backsim \hat{\varphi}_i$;
5) $m_i \equiv 0 \pmod 2$, *если* $\mathfrak{S}(\varphi_i(G)) \subset \mathfrak{S}(J(n_i))$.

Теорема 12. *Формулировка теоремы* 12 *может быть получена из формулировки теоремы* 11 *заменой алгебр* $SL(n)^\sigma$ *на* $SL(n)^0$, $O(n)^\sigma$ *на* $JO(n)$; $I(n_i)$ *на* $J(n_i)$ *и* $J(n_i)$ *на* $I(n_i)$.

Теоремы 13 и 14. *Формулировка теоремы* 13 *(соответственно,* 14*) может быть получена из формулировки теоремы* 11 *(соответственно,* 12*) заменой алгебры* $O(n)^\sigma$ *на* $Sp(n)^\sigma$ *(соответственно,* $JO(n)$ *на* $ISp(n)$*) и заменой друг на друга слов «ортогонально» и «симплектично» и алгебр* $I(n_i)$ *и* $J(n_i)$.

Поступило
24 IX 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] E. Cartan, Ann. Ec. Norm. Sup., 3-me sér., 31, 263 (1914). [2] Ф. Гантмахер, Матем. сборн., 5 (47), 217 (1939). [3] Ф. Карпелевич, ДАН, 85, № 6 (1952). [4] Г. Вейль, Усп. матем. наук, 4, 201 (1938).