Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XCIII, № 4

МАТЕМАТИКА

Н. В. ЕФИМОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОЗНАЧНОЙ ПРОЕКЦИИ ПОВЕРХНОСТИ ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 22 IX 1953)

1. В нашей заметке ([1]) изложена теорема:

Теорема А. *Если поверхность $z=f(x, y)$ регулярна при всех значениях x, y, то гауссова кривизна ее не может оставаться меньшей какого-либо отрицательного числа.*

В связи с этой теоремой естественно возникает следующий вопрос. Пусть поверхность $z=f(x, y)$ регулярна при всех значениях x, y из некоторой области D и пусть кривизна ее остается меньшей некоторого данного отрицательного числа: $K \leqslant -a^2$.

Что можно сказать по поводу области D независимо от рассматриваемой поверхности, зная только число a? Как показывает пример, приведенный в заметке ([1]), область D может быть частью плоскости между параллельными прямыми. Таким образом, эта область может быть бесконечно протяженной и даже иметь бесконечную площадь. Однако оказывается, что задание верхней грани кривизны все-таки накладывает весьма значительные ограничения на характер протяженности области D. Именно, имеет место следующая теорема (для простоты мы предполагаем, что верхняя грань кривизны равна -1).

Теорема В. *Существует константа, которой не может превзойти сторона квадрата, если на этот квадрат однозначно проектируется кусок регулярной поверхности с кривизной $\leqslant -1$.*

Ниже приводятся основные этапы доказательства теоремы В (вместе с тем доказывается и теорема А, поскольку она есть следствие теоремы В).

В качестве константы, о которой говорится в теореме В, можно взять число 14 (точное значение этой константы неизвестно).

2. Для простоты изложения будем считать сначала, что $z=f(x, y)$ регулярна всюду. Основным инструментом доказательства теоремы В являются некоторые особые линии плоскости (x, y), которые определены в заметке ([1]) по данной функции $z=f(x, y)$ и названы „цепочками“. Каждая цепочка является топологической прямой, значит, при любом разрезе распадается на две части; назовем их ее ветвями. Точки соединения соседних звеньев ([1]) назовем вершинами цепочки.

Лемма 1. *Вдоль каждой цепочки в одном из двух направлений на ней функция $q=f'_y(x, y)$ строго возрастает.*

Лемма 2. *Проекция цепочки на ось Ox не превышает числа π.*

Эти свойства цепочек обеспечиваются их конструкцией ([1]).

Лемма 3. *В каждой вершине цепочки $t=f''_{yy}(x, y)=0$, $s=f''_{xy}(x, y)\neq 0$; в соседних вершинах величина s имеет противоположные знаки (за исключением, быть может, одной пары соседних вершин).*

Лемма 4. *Каждая ветвь цепочки неограниченно простирается, по крайней мере, в одном из двух направлений оси Oy.*

Лемма 4 доказывается при помощи леммы 3.

Замечание 1. Если функция $z = f(x, y)$ регулярна только в некоторой области D, то лемму 4 нужно понимать в том смысле, что обе ветви цепочки простираются в достаточно узкой вертикальной полосе плоскости (см. лемму 2), пока этому не препятствует граница области D.

Замечание 2. Меняя роли координатных осей, получим новую систему цепочек, вдоль которых монотонна функция $p = f'_x(x, y)$.

3. Из соотношения

$$p'_x q'_y - p'_y q'_x = rt - s^2 \neq 0$$

вытекают следующие предложения.

Лемма 5. *Каждая связная компонента линии $q = \mathrm{const}$ представляет собой топологическую прямую и в топологическом смысле расположена на плоскости (или в области D) как прямая. Аналогичным свойством обладают линии $p = \mathrm{const}$.*

Лемма 6. *В окрестности каждой точки сеть линий $p = \mathrm{const}$, $q = \mathrm{const}$ регулярна; направления этих линий в каждой точке различны.*

Лемма 7. *Вдоль каждой связной компоненты линии $q = \mathrm{const}$ в одном из двух направлений на ней величина p строго возрастает. Роли p и q здесь взаимны.*

4. Рассмотрим полосу плоскости, заключенную между прямыми a и b, параллельными оси Oy. Предположим, что существуют две дуги линии $q = C$, каждая из которых идет от некоторой точки прямой a к некоторой точке прямой b.

Лемма 8. *Расстояние между прямыми a и b не превышает 2π.*

Доказательство. Обозначим через A, B и C, D концы указанных дуг. В силу леммы 5 криволинейный четыреугольник $ABCD$ не имеет самопересечения. Возьмем внутри $ABCD$ произвольную точку M, равноудаленную от a и b. Проведем через M какую-нибудь цепочку. Если расстояние между a и b больше 2π, то в силу лемм 2 и 4 каждая ветвь проведенной цепочки пересечет либо AB, либо CD. Но тогда на этой цепочке функция $q = f'_y(x, y)$ дважды получает одинаковые значения, что противоречит лемме 1. Тем самым лемма 8 доказана.

Лемма 9 — *предложение, аналогичное лемме 8, но относящееся к прямым, параллельным оси Ox, и к линиям $p = \mathrm{const}$.*

5. Обозначим через β квадрат со сторонами, параллельными координатным осям и равными числу 14. Предположим, что β лежит внутри некоторой области, в которой функция $z = f(x, y)$ регулярна. Возьмем достаточно малое $\varepsilon > 0$ (например, $\varepsilon = 0{,}5$) и проведем внутри квадрата β прямые, параллельные его сторонам и отстоящие от них на расстояние $2\pi + \varepsilon$. Эти прямые вместе со сторонами квадрата β определяют внутри его четыре (перекрывающиеся) зоны, окружающие некоторый меньший квадрат, который мы обозначим через α; площадь квадрата α превышает 12π. Пометим цифрами I, II вертикальные зоны, цифрами III, IV — горизонтальные (считая зону III нижней).

Обозначим через G часть поверхности $z = f(x, y)$, которая проектируется на внутреннюю область квадрата α. Отобразим G на единичную сферу E по параллельности нормалей и обозначим через Ω образ G на E, понимая Ω аналогично римановой поверхности. Пусть $d\sigma$ — элемент площади G, $d\omega$ — соответствующий элемент площади Ω.

По известной теореме Гаусса $d\omega = |K|\,d\sigma$; отсюда

$$\iint_{\Omega} d\omega = \iint_{G} |K|\,d\sigma,$$

а так как $|K| \geqslant 1$, то площадь $\Omega \geqslant$ площади $G \geqslant 12\pi$. Вследствие последних соотношений Ω должна по крайней мере 6 раз накрывать некоторую точку сферы E. Отсюда следует, что внутри квадрата α имеется шесть точек $M_1, \ldots, M_6$ с одинаковыми парами значений p, q; пусть $p(M_i) = p_0$, $q(M_i) = q_0$. Обозначим через l_i связную компоненту линии $q = q_0$ относительно внутренней области квадрата β, проходящую через M_i. Вследствие леммы 7 все линии $l_1, \ldots, l_6$ различны; согласно лемме 5 каждая из них представляет собой топологический отрезок, обеими концами упирающийся в границу квадрата β. Далее, никакие две линии l_i, l_j не могут упираться в одну боковую сторону квадрата β. Это утверждение следует из леммы 8 (применительно к зоне I или к зоне II). Докажем, что не может быть двух линий l_i, l_j, каждая из которых двумя концами подходит к одной горизонтальной стороне квадрата β. Допуская противное, предположим, что каждая из двух линий l_i, l_j двумя концами подходит, например, к нижней стороне квадрата β. Рассмотрим два случая.

а) Ни одна из линий l_i, l_j не охватывает другой, т. е. вместе с соответствующими отрезками нижней стороны квадрата β они ограничивают две области σ_i и σ_j без общих точек. Обозначим через λ_i и λ_j связные компоненты линии $p = p_0$, проходящие через M_i и M_j. В силу леммы 6 линия λ_i входит во внутрь области σ_i, линия λ_j — во внутрь области σ_j. Так как линия λ_i не может вторично пересекать l_i, то она должна дойти до нижней стороны квадрата β. Точно так же должна дойти до этой стороны линия λ_j. Получается противоречие с леммой 9 (применительно к зоне III).

б) Одна из линий l_i, l_j охватывает другую. Пусть l_i охватывает l_j. Обозначим через λ_i связную компоненту линии $p = p_0$, проходящую через M_i. Применяя лемму 6, затем леммы 5 и 7, найдем, что линия λ_i должна двумя своими концами упираться в нижнюю сторону квадрата β. Снова получается противоречие с леммой 9. Тем самым утверждение доказано.

Сопоставляя последние выводы, заключаем, что среди линий $l_1, \ldots, l_6$ должны быть, по крайней мере, две, из которых каждая упирается в разные горизонтальные стороны квадрата β.

Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_6$ — связные компоненты линии $p = p_0$, проходящие, соответственно, через точки $M_1, \ldots, M_6$. Аналогично предыдущему, среди этих линий должны быть по крайней мере две, из которых каждая упирается в разные вертикальные стороны квадрата β. Но в таком случае одна из линий l_i должна пересечь две линии λ_j, λ_k. Получается противоречие с леммой 7 и теорема В доказана.

Московский лесотехнический институт

Поступило 22 IX 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. В. Ефимов, ДАН, **93**, № 3 (1953).