

ВОЛНОВЫЕ ФУНКЦИИ И S -ФАКТОР СОСТАВНОЙ СИСТЕМЫ ДВУХ РЕЛЯТИВИСТСКИХ СПИНОВЫХ КВАРКОВ ПРОИЗВОЛЬНЫХ МАСС© 2021 г. Ю. Д. Черниченко^{1)*}

Поступила в редакцию 9.06.2020 г.; после доработки 9.07.2020 г.; принята к публикации 9.07.2020 г.

Найдены точные решения релятивистских квазипотенциальных уравнений в конфигурационном представлении для волновой функции s -состояния составной системы двух релятивистских спиновых кварков произвольных масс, взаимодействующих посредством кулоновоподобного хромодинамического потенциала. Рассмотрены составные системы, спиновая структура которых отвечает случаю псевдоскаляра, псевдовектора и вектора. Определены условия квантования энергетических уровней s -состояния мезонов в псевдоскалярном, псевдовекторном и векторном случаях. Для этих спиновых структур мезонов получены выражения для релятивистского порогового ресуммирующего S -фактора, отвечающего кулоновоподобному хромодинамическому потенциалу, и исследованы его свойства. Установлены новые закономерности в поведении порогового S -фактора. Рассмотрение проведено в рамках релятивистского квазипотенциального подхода, основанного на ковариантной гамильтоновой формулировке квантовой теории поля, путем перехода от импульсной формулировки в пространстве Лобачевского к трехмерному релятивистскому конфигурационному представлению для случая составной системы двух релятивистских спиновых частиц произвольных масс.

DOI: 10.31857/S0044002721020057

1. ВВЕДЕНИЕ

Релятивистский квазипотенциальный (РКП) подход Логунова–Тавхелидзе [1], построенный на основе ковариантной одновременной формулировки проблемы двух тел в квантовой теории поля, и ковариантный РКП-подход [2, 3], не связанный с формализмом Бете–Солпитера и ковариантным формализмом Фейнмана–Дайсона, а использующий гамильтонову формулировку квантовой теории поля [4], являются одними из эффективных ковариантных методов описания связанной системы двух релятивистских частиц и они нашли широкое применение для описания свойств атомов, адронов и ядер как связанных состояний (см., например, работы [5–9]). При этом РКП-подход, разработанный в [2, 3], позволяет перейти от импульсной формулировки в пространстве Лобачевского к трехмерному релятивистскому конфигурационному представлению ($\mathbf{r}$ -представление), введенному в [10] для случая взаимодействия двух релятивистских частиц равных масс. В рамках РКП-подхода [2, 3] точное решение РКП-уравнения в $\mathbf{r}$ -представлении [10] для радиальной волновой функции составной

системы двух релятивистских спиновых кварков равных масс с хромодинамическим потенциалом

$$V(r) = -\frac{\alpha_s}{r}, \quad \alpha_s > 0, \quad (1)$$

было получено в работе [11]²⁾. Найденное в [11] решение для радиальной волновой РКП-функции составной системы в s -состоянии с хромодинамическим потенциалом (1) позволило получить выражение релятивистского порогового ресуммирующего S -фактора составной системы двух спиновых кварков равных масс m [13]³⁾:

$$S_{\text{RQPS}}(\chi) = \frac{X_{\text{RQPS}}(\chi)}{1 - \exp[-X_{\text{RQPS}}(\chi)]} \times \quad (2)$$

$$\times e^{-\pi\tilde{\rho}} |\Gamma(2 + i\tilde{\rho})F(1 + iB, -i\tilde{\rho}; 2; 1 - e^{-2\chi})|^2,$$

где

$$X_{\text{RQPS}}(\chi) = \frac{\pi\tilde{\alpha}_s(a \operatorname{ch}^2 \chi + b)}{2 \operatorname{sh} \chi},$$

χ — быстрота, которая связана с полной энергией частиц в с.ц.и. $\sqrt{s}$ соотношением

$$\sqrt{s} = 2m \operatorname{ch} \chi, \quad (3)$$

¹⁾Гомельский государственный технический университет имени П.О. Сухого; Международный центр перспективных исследований, Гомель, Беларусь.

*E-mail: chyud@mail.ru; chern@gstu.by

²⁾Аналогичное решение для случая двух спиновых кварков равных масс было получено в [12] при ином определении волновой функции и квазипотенциала.

³⁾Здесь и всюду мы используем систему единиц, в которой положено: $\hbar = c = 1$.

параметры $\tilde{\rho}$, B и $\tilde{\alpha}_s$ даются выражениями

$$\tilde{\rho} = \frac{\tilde{\alpha}_s a \operatorname{ch} \chi}{4}, \quad B = \frac{\tilde{\alpha}_s (a \operatorname{ch}^2 \chi + b)}{4 \operatorname{sh} \chi}, \quad (4)$$

$$\tilde{\alpha}_s = \alpha_s m,$$

а значения спиновых параметров a, b зависят от выбора матриц $\hat{O}$ и определяются следующими выражениями⁴⁾:

$$a = \begin{cases} 1 & \text{при } \hat{O} = \gamma_5 \text{ (псевдоскаляр);} \\ \frac{1}{2} & \text{при } \hat{O} = \gamma_\mu \text{ (вектор);} \\ -\frac{1}{2} & \text{при } \hat{O} = \gamma_5 \gamma_\mu \text{ (псевдовектор);} \end{cases} \quad (5)$$

$$b = \begin{cases} 0 & \text{при } \hat{O} = \gamma_5 \text{ (псевдоскаляр);} \\ \frac{1}{4} & \text{при } \hat{O} = \gamma_\mu \text{ (вектор);} \\ \frac{3}{4} & \text{при } \hat{O} = \gamma_5 \gamma_\mu \text{ (псевдовектор).} \end{cases}$$

Выражения релятивистских волновых функций в $\mathbf{r}$ -представлении для составной системы двух бесспиновых частиц равных масс, взаимодействующих также посредством потенциала (1), были найдены ранее в работах [14–18]. В частности, найденное в [18] решение для радиальной волновой РКП-функции составной системы в s -состоянии с хромодинамическим потенциалом (1), позволило авторам этой работы получить выражение для релятивистского порогового ресуммирующего S -фактора составной системы двух бесспиновых частиц равных масс:

$$S(\chi) = \frac{X(\chi)}{1 - \exp[-X(\chi)]}, \quad X(\chi) = \frac{\pi \tilde{\alpha}_s}{\operatorname{sh} \chi}. \quad (6)$$

Развитый в [18] метод основан на РКП-подходе [1] в форме, предложенной в [2, 3], путем перехода от импульсной формулировки в пространстве Лобачевского к трехмерному релятивистскому конфигурационному представлению, введенному в [10] для случая взаимодействия двух релятивистских частиц равных масс.

Обобщение релятивистского S -фактора (6) на случай двух бесспиновых частиц произвольных масс m_1, m_2 было выполнено в работах [19–21].

⁴⁾Напомним, что для простоты рассмотрения, как и в работах [11, 12], полагалось, что квазипотенциал имеет биспинорную структуру вида $I \otimes I$, а вершинная функция также имеет заданную спинорную структуру, пропорциональную матрице $\hat{O}$, не зависящую от импульсных переменных, причем в качестве $\hat{O}$ выбиралась одна из матриц Дирака $\gamma_5, \gamma_\mu, \gamma_5 \gamma_\mu$ ($\mu = 0, 1, 2, 3$). Такой выбор матрицы $\hat{O}$ позволил авторам работ [11, 12] найти точные решения РКП-уравнений.

Оно имеет такую же форму, как и в (6), и может быть представлено в виде

$$S_{\text{uneq}}(u) = \frac{X_{\text{uneq}}(u)}{1 - \exp[-X_{\text{uneq}}(u)]}, \quad (7)$$

$$X_{\text{uneq}}(u) = \frac{\pi \tilde{\alpha}_s \sqrt{1 - u^2}}{u},$$

где скорость u определяется выражением

$$u = \sqrt{1 - \frac{4m'^2}{s - (m_1 - m_2)^2}}, \quad m' = \sqrt{m_1 m_2}. \quad (8)$$

Напомним о роли, которую играют релятивистские ресуммирующие пороговые факторы при описании квантовых систем в околороговой области, например, кварк-антикварковых систем. Это связано с тем, что при описании кварк-антикварковых систем вблизи их порога рождения ограничиться конечным порядком теории возмущений нельзя даже в том случае, когда КХД-константа связи α_s мала [22, 23]. Причина состоит в том, что реальным параметром пертурбативного ряда из фейнмановских диаграмм в околороговой области является сингулярная величина α_s/v , где $v = \sqrt{1 - 4m^2/s}$ — скорость, а полная энергия взаимодействующих частиц в с.ц.и. $\sqrt{s}$ была определена через быстроту χ в (3). Эта проблема хорошо известна из квантовой электродинамики [24]. Такие пороговые сингулярности вида $(\alpha_s/v)^n$ должны быть просуммированы. Это ресуммирование выполняют пороговые факторы. Поэтому их применение к суммированию пороговых сингулярностей позволит учесть эффекты, обусловленные спинами частиц, составляющих связанную систему. В нерелятивистском случае для кулоновского взаимодействия (1) такое пересуммирование выполняет известный S -фактор Гамова–Зоммерфельда–Сахарова [25–27]

$$S_{\text{nr}} = \frac{X_{\text{nr}}}{1 - \exp(-X_{\text{nr}})}, \quad X_{\text{nr}} = \frac{\pi \alpha_s}{v_{\text{nr}}}, \quad (9)$$

который связан с волновой функцией непрерывного спектра в нуле через $|\psi(0)|^2$. Здесь $2v_{\text{nr}}$ — относительная скорость двух нерелятивистских частиц.

Релятивистская модификация выражения (9) в КХД для описания эффектов вблизи порога рождения пар в процессах $e^+e^- \rightarrow t\bar{t}$ и $e^+e^- \rightarrow W^+W^-$ была выполнена в работах [28, 29] и заключалась в замене $v_{\text{nr}} \rightarrow v$. Точно такой же вид S -фактора, как и в работах [28, 29], был позднее предложен в [30]. В РКП-подходе [2, 3] нерелятивистское выражение (9) для случая двух бесспиновых частиц равных масс впервые было модифицировано в работе [18] и дается выражением (6). Еще одно релятивистское обобщение S -фактора и также для

случая двух бесспиновых частиц равных масс было получено в [31]. Релятивистский S -фактор для случая двух частиц произвольных масс $m_1 \neq m_2$ был предложен в работе [32]. Этот фактор был получен в рамках релятивистской квантовой механики на основе уравнения Шредингера. Однако, как было показано в работе [19], релятивистские пределы S -факторов в [30–32] существенно отличаются от релятивистского предела ($v \rightarrow 1$) S -фактора (6), равного единице.

Также напомним, что в двухчастичном приближении амплитуда Бете–Солпитера $\chi_{BS}(x=0)$ связана с волновыми РКП-функциями в пространстве импульсов и в конфигурационном представлении (см. [18–21, 33, 34]) соотношением

$$\chi_{BS}(x=0) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\Omega_{\mathbf{p}} \Psi_q(\mathbf{p}) = \psi_q(\mathbf{r}) \Big|_{r=i\lambda}, \quad (10)$$

а S -фактор в РКП-подходе [2, 3] определяется через волновую РКП-функцию непрерывного спектра $\psi_q(\mathbf{r})$ выражением (подробности см. в [18–21, 33])

$$S_{RQP}(\chi) = \lim_{r \rightarrow i\lambda} |\psi_q(\mathbf{r})|^2. \quad (11)$$

Здесь $d\Omega_{\mathbf{p}} = md\mathbf{p}/E_p$ — релятивистский трехмерный элемент объема в пространстве Лобачевского, которое реализуется на верхней полё массового гиперболюида $E_p^2 - \mathbf{p}^2 = E_q^2 - \mathbf{q}^2 = m^2$, $\lambda = 1/m$ — комптоновская длина волны, а модуль радиуса-вектора $\mathbf{r}$ ($\mathbf{r} = r\mathbf{n}$, $|\mathbf{n}| = 1$) является релятивистским инвариантом.

Подчеркнем, что S -фактор (6) был получен для потенциала (1), зависящего в конфигурационном представлении от модуля инвариантной релятивистской относительной координаты $r = |\mathbf{r}|$ и имеющий форму кулоновского потенциала. В импульсном пространстве потенциал (1) воспроизводит потенциал взаимодействия между кварками, который дается выражением

$$\tilde{V}(\chi_{\Delta}) \sim -\frac{\alpha_s}{\chi_{\Delta} \operatorname{sh} \chi_{\Delta}},$$

где относительная быстрота χ_{Δ} соответствует вектору передачи импульса в пространстве Лобачевского $\Delta = \mathbf{p}(-)\mathbf{k}$ и связана с квадратом переданного 4-импульса $Q^2 = -(p-k)^2$ соотношением $Q^2 = 2M^2(\operatorname{ch} \chi_{\Delta} - 1)$, $M^2 = (p+k)^2$. Таким образом, мы считаем, что внутри адрона взаимодействие между кварками осуществляется путем обмена безмассовым скалярным глюоном, пропагатору которого в РКП-подходе в $\mathbf{r}$ -представлении отвечает потенциал (1). В импульсном пространстве при больших значениях квадрата переданного 4-импульса Q^2 относительная быстрота $\chi_{\Delta} \approx \ln(Q^2/M^2)$ и, следовательно, потенциал $\tilde{V}(\chi_{\Delta})$

ведет себя как $[(Q/M)^2 \ln(Q/M)^2]^{-1}$, что воспроизводит главное поведение потенциала в КХД, который в лидирующем порядке пропорционален $\bar{\alpha}_s(Q^2)/Q^2$, где $\bar{\alpha}_s(Q^2)$ — инвариантный заряд. Такое КХД-подобное поведение потенциала (1) в РКП-подходе, учитывающее существенную особенность КХД — свойство асимптотической свободы и закон эволюции инвариантного заряда, впервые было отмечено в работе [35]. Применение релятивистского S -фактора (6) для описания ряда характеристик адронных процессов можно найти в [36–39], причем при его применении к задачам КХД требуется замена: $\alpha_s \rightarrow 4\alpha_s/3$.

Настоящая работа является продолжением работ автора [11, 13] и посвящена нахождению точных выражений волновых РКП-функций в $\mathbf{r}$ -представлении для составной системы двух спиновых кварков произвольных масс, взаимодействующих посредством кулоновоподобного хромодинамического потенциала (1). Рассмотрены составные системы, спиновая структура которых отвечает случаю псевдоскаляра, псевдовектора и вектора. Также будут определены условия квантования энергетических уровней для этих спиновых структур. Для этих же спиновых структур будут получены новые выражения для релятивистского порогового ресуммирующего S -фактора, отвечающего кулоновоподобному хромодинамическому потенциалу, и исследованы его свойства. Рассмотрение проводится в рамках РКП-подхода [2, 3] путем перехода от импульсной формулировки в пространстве Лобачевского к $\mathbf{r}$ -представлению, введенному в [10] для случая составной системы двух релятивистских спиновых частиц произвольных масс m_1, m_2 [40, 41].

2. УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ВЕРШИННОЙ ФУНКЦИИ

С помощью правил шпурионной диаграммной техники [2, 4, 41] уравнение для вершинной функции составной системы двух релятивистских спиновых кварков произвольных масс m_1, m_2 запишется в виде

$$\begin{aligned} \Gamma_Q^{\alpha\beta}(p_1, p_2; \lambda_Q \tau_Q) &= \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\tau_K d^{(4)}k_1 d^{(4)}k_2 \times \\ &\times V^{\alpha\gamma, \delta\beta}(p_1, p_2; \lambda_Q \tau_Q | k_1, k_2; \lambda_Q \tau_K) \times \\ &\times S_{\gamma\kappa}^{(+)}(k_1, m_1) \frac{\Gamma_Q^{\kappa\theta}(k_1, k_2; \lambda_Q \tau_K)}{\tau_K - i\varepsilon} \times \\ &\times S_{\theta\delta}^{(+)}(k_2, -m_2) \delta^{(4)}(-Q + k_1 + k_2 - \lambda_Q \tau_K), \end{aligned} \quad (12)$$

где $S^{(+)}(k_i, m_i) = \theta(k_{i0})(\hat{k}_i + m_i)\delta(k_i^2 - m_i^2)$ — положительно-частотные части спинорных функций Грина, а $\alpha, \beta, \dots, \theta$ — спинорные индексы;

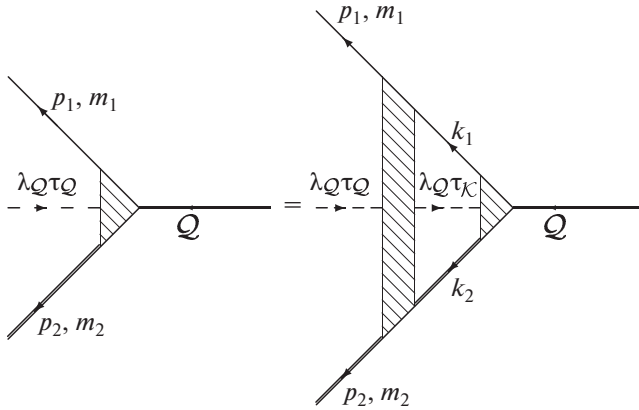


Рис. 1. Графическое уравнение для вершинной функции составной системы двух релятивистских спинных частиц произвольных масс, соответствующее правилам шпурионной диаграммной техники.

$\hat{k}_i = k_i^\mu \gamma_\mu$, γ_μ — матрицы Дирака ($\mu = 0, 1, 2, 3$), m_i — масса i -й составляющей, которая переносит 4-импульс k_i , $i = 1, 2$ (или p_i, q_i), причем все 4-импульсы принадлежат верхним полам массовых гиперboloидов:

$$k_i^2 = k_{i0}^2 - \mathbf{k}_i^2 = m_i^2, \quad i = 1, 2. \quad (13)$$

Уравнению (12) отвечает его графический аналог на рис. 1. Сплошные линии соответствуют ее составляющим, которые переносит 4-импульсы p_i, k_i , $i = 1, 2$; штриховые линии — квазичастицам-шпурионам, а блок диаграмм, обозначенный на рис. 1 трапецией, а в уравнении (12) через $V^{\alpha\gamma, \delta\beta}(p_1, p_2; \lambda_Q \tau_Q | k_1, k_2; \lambda_Q \tau_K)$, рассматривается как квазипотенциал, которому соответствует сумма неприводимых в смысле одношпурионных и двухчастичных рассеяний диаграмм. В качестве вектора 4-скорости составной частицы для удобства рассмотрения выбран вектор $\lambda_Q = (\lambda_Q^0; \lambda_Q) = Q/\sqrt{Q^2}$, $Q^2 = (q_1 + q_2)^2 = Q_0^2 - Q^2 = s_q = M_Q^2$.

Для простоты дальнейшего рассмотрения (как и в работах [11, 12]) будем считать, что квазипотенциал в (12) имеет биспинорную структуру вида $I \otimes \otimes I$ и решения этого уравнения также имеют определенную спинорную структуру, т.е. квазипотенциал $V^{\alpha\gamma, \delta\beta}(p_1, p_2; \lambda_Q \tau_Q | k_1, k_2; \lambda_Q \tau_K)$ и вершинную функцию $\Gamma_Q^{\alpha\beta}(p_1, p_2; \lambda_Q \tau_Q)$ представим в виде

$$\begin{aligned} V^{\alpha\gamma, \delta\beta}(p_1, p_2; \lambda_Q \tau_Q | k_1, k_2; \lambda_Q \tau_K) &= \hat{O}^{\alpha\gamma} (\hat{O}^+)^{\delta\beta} V(p_1, p_2; \lambda_Q \tau_Q | k_1, k_2; \lambda_Q \tau_K), \\ \Gamma_Q^{\alpha\beta}(p_1, p_2; \lambda_Q \tau_Q) &= \hat{O}^{\alpha\beta} \Gamma_Q(p_1, p_2; \lambda_Q \tau_Q), \end{aligned}$$

где матрица $\hat{O}$ не зависит от импульсных переменных, причем шпур $\text{Sp}[\hat{O}^+ \hat{O}] \neq 0$, а в качестве $\hat{O}$

будем выбирать одну из матриц $\gamma_5, \gamma_\mu, \gamma_5 \gamma_\mu$. Такой выбор матрицы $\hat{O}$ позволит найти точные решения уравнения (12).

В данном подходе скалярная часть вершинной функции $\Gamma_Q(p_1, p_2; \lambda_Q \tau_Q)$ представляет собой четырехставку, у которой два внешних импульса коллинеарны в силу выбора вектора 4-скорости составной частицы $\lambda_Q = Q/M_Q$. Значит, как и в бесспиновом случае, для составной системы двух спинных частиц, которые находятся в состоянии движения с относительным орбитальным моментом J , скалярная часть вершинной функции $\Gamma_Q(p_1, p_2; \lambda_Q \tau_Q)$ будет зависеть только от одного скалярного лоренц-инвариантного параметра, в качестве которого выберем Qp_2 и введем следующие обозначения (подробности см. в работе [42]):

$$\Gamma_Q(p_1, p_2; \lambda_Q \tau_Q) = \Gamma_{M_Q}(Qp_2),$$

$$V(p_1, p_2; \lambda_Q \tau_Q | k_1, k_2; \lambda_Q \tau_K) = V(Qp_2, Qk_2; M_Q).$$

Тогда, выполнив в (12) интегрирования по k_{i0} ($i = 1, 2$) и учитывая выбор вектора 4-скорости λ_Q , получим уравнение

$$\begin{aligned} \Gamma_{M_Q}(Qp_2) &= \frac{[\text{Sp} \hat{O}^+ \hat{O}]^{-1}}{(2\pi)^3} \times \\ &\times \int d\tau_K \frac{d\mathbf{k}_1}{2\sqrt{m_1^2 + \mathbf{k}_1^2}} \frac{d\mathbf{k}_2}{2\sqrt{m_2^2 + \mathbf{k}_2^2}} \times \\ &\times \frac{V(Qp_2, Qk_2; M_Q)}{\tau_K - i\varepsilon} \text{Sp}[\hat{O}^+ (\hat{k}_1 + m_1) \times \\ &\times \hat{O} (\hat{k}_2 - m_2)] \Gamma_{M_Q}(Qk_2) \times \\ &\times \delta^{(4)}(-Q + k_1 + k_2 - \lambda_Q \tau_K). \end{aligned} \quad (14)$$

Теперь в уравнении (14) выполним интегрирования по $\mathbf{k}_1, \tau_K$. Для этого в интегралах по $\mathbf{k}_i$ ($i = 1, 2$), как и в бесспиновом случае (подробности см. в работе [42]), выполним чистое преобразование Лоренца (“буст”) $\Lambda_{\lambda_Q}^{-1}$, соответствующее 4-скорости составной частицы λ_Q , и воспользуемся инвариантностью $\delta^{(4)}$ -функции в (14) относительно чистого преобразования Лоренца. В результате уравнение (14) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \Gamma_{M_Q}(\Delta_{p_2, m_2 \lambda_Q}) &= -\frac{[\text{Sp} \hat{O}^+ \hat{O}]^{-1}}{(2\pi)^3} \times \\ &\times \int \frac{d\Delta_{k_2, m_2 \lambda_Q}}{\Delta_{k_2, m_2 \lambda_Q}^0} V(\Delta_{p_2, m_2 \lambda_Q}, \Delta_{k_2, m_2 \lambda_Q}; M_Q) \times \\ &\times \frac{\Gamma_{M_Q}(\Delta_{k_2, m_2 \lambda_Q})}{4\Delta_{k_1, m_1 \lambda_Q}^0 (M_Q - \sqrt{s_{\Delta_{k_2, m_2 \lambda_Q}}} + i\varepsilon)} \times \\ &\times \text{Sp}[\hat{O}^+ (\hat{\Delta}_{k_1, m_1 \lambda_Q} + m_1) \hat{O} (\hat{\Delta}_{k_2, m_2 \lambda_Q} - m_2)], \end{aligned} \quad (15)$$

где были введены обозначения

$$\Gamma_{M_Q}(Qp_2) = \Gamma_{M_Q}(\Delta_{p_2, m_2 \lambda_Q}),$$

$$\begin{aligned}
V(Qp_2, Qk_2; M_Q) &= \\
&= V(\Delta_{p_2, m_2 \lambda_Q}, \Delta_{k_2, m_2 \lambda_Q}; M_Q), \\
\Delta_{k_1, m_1 \lambda_Q} &= -\Delta_{k_2, m_2 \lambda_Q}, \\
\Delta_{k_1, m_1 \lambda_Q}^0 &= \sqrt{m_1^2 + \Delta_{k_2, m_2 \lambda_Q}^2}, \\
\Delta_{k_2, m_2 \lambda_Q}^0 &= \sqrt{m_2^2 + \Delta_{k_2, m_2 \lambda_Q}^2},
\end{aligned}$$

причем $\Delta_{k_i, m_i \lambda_Q}$ и $\Delta_{k_i, m_i \lambda_Q}^0$ ($i = 1, 2$) — пространственная и временная компоненты 4-вектора $\Lambda_{\lambda_Q}^{-1} k_i = \Delta_{k_i, m_i \lambda_Q}$ из пространства Лобачевского, моделями которого служат поверхности массовых гиперboloидов (13), а группа Лоренца является его группой движения на гиперboloидах, т.е.

$$\begin{aligned}
\Lambda_{\lambda_Q}^{-1} k_i &= \Delta_{k_i, m_i \lambda_Q} = k_i(-)m_i \lambda_Q = \\
&= k_i - \lambda_Q \left(k_{i0} - \frac{k_i \cdot \lambda_Q}{1 + \lambda_Q^0} \right),
\end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned}
(\Lambda_{\lambda_Q}^{-1} k_i)^0 &= \Delta_{k_i, m_i \lambda_Q}^0 = k_{i0} \lambda_Q^0 - k_i \cdot \lambda_Q = \\
&= \sqrt{m_i^2 + \Delta_{k_i, m_i \lambda_Q}^2}, \quad i = 1, 2,
\end{aligned}$$

и было учтено, что Qp_2 — лоренцевый скаляр ($Qp_2 = \Lambda_{\lambda_Q}^{-1}(Qp_2) = M_Q \Delta_{p_2, m_2 \lambda_Q}^0$), а полная энергия двух свободных релятивистских частиц $\sqrt{s_k} = \sqrt{(k_1 + k_2)^2}$ является инвариантом при преобразованиях Лоренца (16):

$$\begin{aligned}
\sqrt{s_k} &= \Lambda_{\lambda_Q}^{-1} \sqrt{s_k} = \sqrt{s_{\Delta_{k_2, m_2 \lambda_Q}}} = \\
&= \sqrt{m_1^2 + \Delta_{k_2, m_2 \lambda_Q}^2} + \sqrt{m_2^2 + \Delta_{k_2, m_2 \lambda_Q}^2}.
\end{aligned} \quad (17)$$

Вычисление шпуров для матриц $\hat{O} = \gamma_5, \gamma_\mu, \gamma_5 \gamma_\mu$ дает

$$\begin{aligned}
&\text{Sp}[\hat{O}^+(\hat{\Delta}_{k_1, m_1 \lambda_Q} + m_1)\hat{O}(\hat{\Delta}_{k_2, m_2 \lambda_Q} - m_2)] = \\
&= \begin{cases} -2[s_{\Delta_{k_2, m_2 \lambda_Q}} - (m_1 - m_2)^2] & \text{при } \hat{O} = \gamma_5; \\ -4[s_{\Delta_{k_2, m_2 \lambda_Q}} - (m_1 - m_2)^2 + 2m_1 m_2] & \text{при } \hat{O} = \gamma_\mu; \\ 4[s_{\Delta_{k_2, m_2 \lambda_Q}} - (m_1 - m_2)^2 - 6m_1 m_2] & \text{при } \hat{O} = \gamma_5 \gamma_\mu; \end{cases} \quad \text{Sp}[\hat{O}^+ \hat{O}] = \begin{cases} 4 & \text{при } \hat{O} = \gamma_5; \\ 16 & \text{при } \hat{O} = \gamma_\mu; \\ 16 & \text{при } \hat{O} = \gamma_5 \gamma_\mu, \end{cases}
\end{aligned} \quad (18)$$

которые при $m_1 = m_2 = m$ совпадают с аналогичными выражениями для шпуров в работе [11].

3. УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ВОЛНОВОЙ ФУНКЦИИ

Напомним, что рассматриваемый здесь РКП-подход для случая взаимодействия двух релятивистских спиновых частиц произвольных масс m_1 и m_2 позволяет ввести концепцию эффективной релятивистской частицы [40, 41], которая выступает в качестве двухчастичной связанной системы, имеет массу $m' = \sqrt{m_1 m_2}$, относительный 3-импульс $\Delta_{k', m' \lambda_Q}$ и несет полную энергию двух свободных релятивистских частиц произвольных масс $\sqrt{s_k}$,

пропорциональную энергии $\Delta_{k', m' \lambda_Q}^0$ одной эффективной релятивистской частицы массы m' :

$$\sqrt{s_k} = \sqrt{(k_1 + k_2)^2} = \frac{m'}{\mu} \Delta_{k', m' \lambda_Q}^0, \quad (19)$$

$$\Delta_{k', m' \lambda_Q}^0 = \sqrt{m'^2 + \Delta_{k', m' \lambda_Q}^2},$$

где $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ — обычная приведенная масса двух частиц произвольных масс.

Таким образом, двухчастичная задача сводится к одночастичной, описание которой ведется на языке эффективной релятивистской частицы. Для перехода от двухчастичной задачи к одночастичной в уравнении (15) выполним замену переменных вида (подробности см. в работах [42, 43])

$$\Delta_{k', m' \lambda_Q} = \frac{\Delta_{k_2, m_2 \lambda_Q}}{|\Delta_{k_2, m_2 \lambda_Q}|} \left[\Delta_{k_2, m_2 \lambda_Q}^2 - \left(\frac{m_1 \sqrt{m_2^2 + \Delta_{k_2, m_2 \lambda_Q}^2} - m_2 \sqrt{m_1^2 + \Delta_{k_2, m_2 \lambda_Q}^2}}{m_1 + m_2} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (20)$$

а преобразование, обратное (20), дается выражением

$$\Delta_{k_2, m_2 \lambda_Q} = \Delta_{k', m' \lambda_Q} \frac{m'}{2\mu} \sqrt{\frac{4\mu^2 + \Delta_{k', m' \lambda_Q}^2}{m'^2 + \Delta_{k', m' \lambda_Q}^2}}. \quad (21)$$

Тогда для квадрата трехмерного относительного импульса $\Delta_{k', m' \lambda_Q}$ эффективной релятивистской частицы, имеющей массу m' , получаем выражение

$$\Delta_{k', m' \lambda_Q}^2 = \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} [s_k - (m_1 + m_2)^2],$$

откуда и следует формула (19), а из выражений (17) и (19) следуют соотношения

$$\sqrt{m_1^2 + \Delta_{k_2, m_2 \lambda_Q}^2} = \frac{m'}{2\mu} f_+^{-1}(\Delta_{k', m' \lambda_Q}), \quad (22)$$

$$\sqrt{m_2^2 + \Delta_{k_2, m_2 \lambda_Q}^2} = \frac{m'}{2\mu} f_-^{-1}(\Delta_{k', m' \lambda_Q}),$$

при $m_1 > m_2$;

$$\sqrt{m_1^2 + \Delta_{k_2, m_2 \lambda_Q}^2} = \frac{m'}{2\mu} f_-^{-1}(\Delta_{k', m' \lambda_Q}),$$

$$\sqrt{m_2^2 + \Delta_{k_2, m_2 \lambda_Q}^2} = \frac{m'}{2\mu} f_+^{-1}(\Delta_{k', m' \lambda_Q}),$$

при $m_1 < m_2$,

где

$$f_{\pm}(\Delta_{k', m' \lambda_Q}) = \frac{\sqrt{m'^2 + \Delta_{k', m' \lambda_Q}^2}}{m'^2 + \Delta_{k', m' \lambda_Q}^2 \pm m' \sqrt{m'^2 - 4\mu^2}}. \quad (23)$$

При этом релятивистский трехмерный элемент объема в пространстве Лобачевского в соответствии с (20)–(23) будет преобразовываться следующим образом:

$$\frac{d\Delta_{k_2, m_2 \lambda_Q}}{\sqrt{m_2^2 + \Delta_{k_2, m_2 \lambda_Q}^2} \sqrt{m_1^2 + \Delta_{k_2, m_2 \lambda_Q}^2}} = \quad (24)$$

$$= \frac{m'}{2\mu} \frac{d\Delta_{k', m' \lambda_Q}}{\sqrt{m'^2 + \Delta_{k', m' \lambda_Q}^2}} f(\Delta_{k', m' \lambda_Q}),$$

где

$$f(\Delta_{k', m' \lambda_Q}) = \frac{\sqrt{4\mu^2 + \Delta_{k', m' \lambda_Q}^2}}{m'^2 + \Delta_{k', m' \lambda_Q}^2}. \quad (25)$$

Итак, выполнив в уравнении (15), как и в работах [42, 43], замену переменных вида (20), (21) и учитывая соотношения (18), (19), (24) и (25), приходим к полностью ковариантному РКП-уравнению в пространстве импульсов для волновой

РКП-функции $\Psi_{M_Q}(\Delta_{p', m' \lambda_Q})$:

$$\frac{1}{m'} (\Delta_{q', m' \lambda_Q}^0 - \Delta_{p', m' \lambda_Q}^0) \Psi_{M_Q}(\Delta_{p', m' \lambda_Q}) = \quad (26)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\Omega_{\Delta_{k', m' \lambda_Q}} \times$$

$$\times \tilde{V}(\Delta_{p', m' \lambda_Q}, \Delta_{k', m' \lambda_Q}; \Delta_{q', m' \lambda_Q}^0) \times$$

$$\times \hat{A}\left(\frac{\Delta_{k', m' \lambda_Q}^0}{m'}\right) \Psi_{M_Q}(\Delta_{k', m' \lambda_Q}).$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\tilde{V}(\Delta_{p', m' \lambda_Q}, \Delta_{k', m' \lambda_Q}; \Delta_{q', m' \lambda_Q}^0) =$$

$$= f(\Delta_{p', m' \lambda_Q}) V(\Delta_{p', m' \lambda_Q}, \Delta_{k', m' \lambda_Q}; \Delta_{q', m' \lambda_Q}^0),$$

$$\hat{A}\left(\frac{\Delta_{k', m' \lambda_Q}^0}{m'}\right) = \frac{1}{4} \left[a' \left(\frac{\Delta_{k', m' \lambda_Q}^0}{m'} \right)^2 + b' \right], \quad (27)$$

где

$$a' = \begin{cases} g'^2 & \text{при } \hat{O} = \gamma_5 \text{ (псевдоскаляр);} \\ \frac{1}{2} g'^2 & \text{при } \hat{O} = \gamma_\mu \text{ (вектор);} \\ -\frac{1}{2} g'^2 & \text{при } \hat{O} = \gamma_5 \gamma_\mu \text{ (псевдовектор);} \end{cases} \quad (28)$$

$$b' = \begin{cases} 1 - g'^2 & \text{при } \hat{O} = \gamma_5 \text{ (псевдоскаляр);} \\ \frac{3}{4} - \frac{1}{2} g'^2 & \text{при } \hat{O} = \gamma_\mu \text{ (вектор);} \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{2} g'^2 & \text{при } \hat{O} = \gamma_5 \gamma_\mu \text{ (псевдовектор),} \end{cases}$$

а фактор g' определяется выражением

$$g' = \frac{m'}{2\mu} = \frac{m_1 + m_2}{2\sqrt{m_1 m_2}} \quad (29)$$

и его смысл будет раскрыт позже, причем значения параметров a' , b' в (28) при $m_1 = m_2 = m$ совпадают с соответствующими выражениями для a , b в (5), которые были получены в [11].

Волновая РКП-функция в пространстве импульсов для случая взаимодействия двух релятивистских спиновых частиц произвольных масс m_1 , m_2 в уравнении (26) определена, как и в бесспиновом случае [42, 43], выражением

$$\Psi_{M_Q}(\Delta_{p', m' \lambda_Q}) =$$

$$= \frac{f(\Delta_{p', m' \lambda_Q}) \Gamma_{M_Q}(\Delta_{p', m' \lambda_Q})}{2^{3/2} \sqrt{m'} (2\Delta_{q', m' \lambda_Q}^0 - 2\Delta_{p', m' \lambda_Q}^0)},$$

а $d\Omega_{\Delta_{k'},m'\lambda_Q} = m'd\Delta_{k'},m'\lambda_Q/\Delta_{k'},m'\lambda_Q^0$ — релятивистский трехмерный элемент объема в пространстве Лобачевского, причем теперь все 4-импульсы принадлежат верхней полё массового гиперboloида

$$\Delta_{k'},m'\lambda_Q^{02} - \Delta_{k'},m'\lambda_Q^2 = m'^2,$$

которая погружена в 4-мерное импульсное пространство и служит моделью этого релятивистского неевклидова пространства импульсов, а группа Лоренца на этой поверхности является его группой движений, осуществляющей трансляцию в этом пространстве импульсов. Роль плоских волн, соответствующих этим трансляциям в пространстве Лобачевского, выполняют функции Шапира [44]

$$\begin{aligned} \xi(\Delta_{p'},m'\lambda_Q, \mathbf{r}) &= \\ &= \left(\frac{\Delta_{p'},m'\lambda_Q^0 - \Delta_{p'},m'\lambda_Q \cdot \mathbf{n}}{m'} \right)^{-1-ir/\lambda'}, \end{aligned} \quad (30)$$

где $\lambda' = 1/m'$ — комптоновская длина волны эффективной релятивистской частицы массы m' , а модуль радиуса-вектора $\mathbf{r}$ ($\mathbf{r} = r\mathbf{n}$, $|\mathbf{n}| = 1$) является релятивистским инвариантом. Эти функции соответствуют главной серии унитарных неприводимых представлений группы Лоренца и в нерелятивистском пределе ($|\Delta_{p'},m'\lambda_Q| \ll 1/\lambda'$, $r \gg \lambda'$) $\xi(\Delta_{p'},m'\lambda_Q, \mathbf{r}) \rightarrow \exp(i\Delta_{p'},m'\lambda_Q \cdot \mathbf{r})$. Кроме того, функции (30) удовлетворяют условиям полноты и ортогональности

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(2\pi)^3} \int d\Omega_{\Delta_{p'},m'\lambda_Q} \times \\ &\times \xi(\Delta_{p'},m'\lambda_Q, \mathbf{r}) \xi^*(\Delta_{p'},m'\lambda_Q, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}), \\ &\frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{r} \xi(\Delta_{q'},m'\lambda_Q, \mathbf{r}) \xi^*(\Delta_{p'},m'\lambda_Q, \mathbf{r}) = \\ &= \frac{\Delta_{q'},m'\lambda_Q^0}{m'} \delta(\Delta_{p'},m'\lambda_Q - \Delta_{q'},m'\lambda_Q), \end{aligned} \quad (31)$$

и уравнению в терминах конечных разностей

$$(\hat{H}_0 - 2\Delta_{p'},m'\lambda_Q^0) \xi(\Delta_{p'},m'\lambda_Q, \mathbf{r}) = 0. \quad (32)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \hat{H}_0 &= 2m' \left[\text{ch} \left(i\lambda' \frac{\partial}{\partial r} \right) + \right. \\ &\left. + \frac{i\lambda'}{r} \text{sh} \left(i\lambda' \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{\lambda'^2}{2r^2} \Delta_{\theta,\varphi} \exp \left(i\lambda' \frac{\partial}{\partial r} \right) \right] \end{aligned} \quad (33)$$

— оператор свободного гамильтониана, являющийся конечно-разностным оператором, построенным из операторов сдвига $\exp(\pm i\lambda' \partial/\partial r)$, в то время как $\Delta_{\theta,\varphi}$ — его угловая часть.

Переход в релятивистское конфигурационное представление осуществляется с помощью преобразований Шапира

$$\begin{aligned} \psi_{M_Q}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\Omega_{\Delta_{p'},m'\lambda_Q} \times \\ &\times \xi(\Delta_{p'},m'\lambda_Q, \mathbf{r}) \Psi_{M_Q}(\Delta_{p'},m'\lambda_Q), \end{aligned} \quad (34)$$

$$\Psi_{M_Q}(\Delta_{p'},m'\lambda_Q) = \int d\mathbf{r} \xi^*(\Delta_{p'},m'\lambda_Q, \mathbf{r}) \psi_{M_Q}(\mathbf{r}).$$

Для случая локального квазипотенциала

$$\begin{aligned} \tilde{V}(\Delta_{p'},m'\lambda_Q, \Delta_{k'},m'\lambda_Q; \Delta_{q'},m'\lambda_Q^0) &\equiv \\ &\equiv \tilde{V}((\Delta_{p'},m'\lambda_Q(-)\Delta_{k'},m'\lambda_Q)^2; \Delta_{q'},m'\lambda_Q^0) \end{aligned} \quad (35)$$

квадрат вектора передачи импульса в пространстве Лобачевского $\Delta_{p',k'} = \mathbf{p}'(-)\mathbf{k}'$ является лоренцевым инвариантом, что согласно (16) позволяет представить его в виде

$$\begin{aligned} \Delta_{p',k'}^2 &= (\mathbf{p}'(-)\mathbf{k}')^2 = (\Delta_{p',k'}^0)^2 - m'^2 = \\ &= \left(\frac{p'k'}{m'} \right)^2 - m'^2 = \left(\frac{\Lambda_{\lambda_Q}^{-1} p' \Lambda_{\lambda_Q}^{-1} k'}{m'} \right)^2 - m'^2 = \\ &= \left(\frac{\Delta_{p'},m'\lambda_Q \Delta_{k'},m'\lambda_Q}{m'} \right)^2 - m'^2 = \\ &= ((\Delta_{p'},m'\lambda_Q(-)\Delta_{k'},m'\lambda_Q)^0)^2 - m'^2 = \\ &= (\Delta_{p'},m'\lambda_Q(-)\Delta_{k'},m'\lambda_Q)^2 = \Delta_{\Delta_{p'},m'\lambda_Q, \Delta_{k'},m'\lambda_Q}^2. \end{aligned}$$

Следовательно, квазипотенциал (35) в пространстве Лобачевского зависит от квадрата разности двух ковариантно определенных векторов импульса частиц. С таким квазипотенциалом правая часть уравнения (26) представляет собой свертку в пространстве Лобачевского, что позволяет применить преобразования (34). Тогда применение преобразований (34) к уравнению (26) и использование уравнения (32), условия полноты в (31), а также теоремы сложения для релятивистских плоских волн (30),

$$\begin{aligned} &\int d\omega_n \xi(\Delta_{p'},m'\lambda_Q(-)\Delta_{k'},m'\lambda_Q, \mathbf{r}) = \\ &= \int d\omega_n \xi(\Delta_{p'},m'\lambda_Q, \mathbf{r}) \xi^*(\Delta_{k'},m'\lambda_Q, \mathbf{r}), \end{aligned} \quad (36)$$

и эрмитовости оператора свободного гамильтониана (33), позволяет нам получить конечно-разностную форму релятивистского уравнения Шредингера в конфигурационном представлении для волновой РКП-функции составной системы двух релятивистских спиновых кварков произвольных масс:

$$\frac{1}{2m'} (2\Delta_{q'},m'\lambda_Q^0 - \hat{H}_0) \psi_{M_Q}(\mathbf{r}) = \quad (37)$$

$$= V(\mathbf{r}; \Delta_{q',m'\lambda_Q}^0) \hat{A} \left(\frac{\hat{H}_0}{2m'} \right) \psi_{M_Q}(\mathbf{r}).$$

Здесь операторы $\hat{A}$ и $\hat{H}_0$ определены в (27) и (33), а потенциал $V(\mathbf{r}; \Delta_{q',m'\lambda_Q}^0)$, являясь локальным в смысле геометрии Лобачевского, дается в терминах тех же релятивистских плоских волн:

$$V(\mathbf{r}; \Delta_{q',m'\lambda_Q}^0) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\Omega_{\Delta_{p',m'\lambda_Q}, \Delta_{k',m'\lambda_Q}} \times \\ \times \xi(\Delta_{p',m'\lambda_Q}, \Delta_{k',m'\lambda_Q}, \mathbf{r}) \times \\ \times \tilde{V}((\Delta_{p',m'\lambda_Q}, \Delta_{k',m'\lambda_Q})^2; \Delta_{q',m'\lambda_Q}^0).$$

При том же условии локальности квазипотенциала применение преобразований (34) к уравнению (26) и использование теоремы сложения (36) для релятивистских плоских волн (30) приводит к интегральной форме релятивистского уравнения Шредингера в конфигурационном представлении для волновой РКП-функции составной системы двух релятивистских спиновых кварков произвольных масс:

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int d\Omega_{\Delta_{p',m'\lambda_Q}} \times \quad (38) \\ \times \frac{(\Delta_{q',m'\lambda_Q}^0 - \Delta_{p',m'\lambda_Q}^0)}{m'} \xi(\Delta_{p',m'\lambda_Q}, \mathbf{r}) \times \\ \times \int d\mathbf{r}' \xi^*(\Delta_{p',m'\lambda_Q}, \mathbf{r}') \psi_{M_Q}(\mathbf{r}') = \\ = V(\mathbf{r}; \Delta_{q',m'\lambda_Q}^0) \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\Omega_{\Delta_{k',m'\lambda_Q}} \times \\ \times \hat{A} \left(\frac{\Delta_{k',m'\lambda_Q}^0}{m'} \right) \xi(\Delta_{k',m'\lambda_Q}, \mathbf{r}) \times \\ \times \int d\mathbf{r}' \xi^*(\Delta_{k',m'\lambda_Q}, \mathbf{r}') \psi_{M_Q}(\mathbf{r}').$$

Считая потенциал сферически симметричным и используя разложение волновой РКП-функции $\psi_{M_Q}(\mathbf{r})$ по функциям Лежандра первого рода $P_\mu^\nu(z)$,

$$\psi_{M_Q}(\mathbf{r}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) i^\ell \frac{\varphi_\ell(r, \chi')}{r} \times \\ \times P_\ell \left(\frac{\Delta_{q',m'\lambda_Q} \cdot \mathbf{r}}{|\Delta_{q',m'\lambda_Q}| r} \right),$$

выполняя в (37) и (38) выкладки в полной аналогии с выводом в [19–21, 33] конечно-разностной и интегральной форм уравнения для радиальной волновой РКП-функции с относительным орбитальным моментом ℓ для случая двух бесспиновых кварков произвольных масс, получим конечно-разностную

и интегральную формы релятивистского уравнения Шредингера в конфигурационном представлении для радиальной волновой РКП-функции составной системы двух релятивистских спиновых кварков произвольных масс с относительным орбитальным моментом ℓ в виде⁵⁾

$$\left(\hat{H}_{0,\ell}^{\text{rad}} - \text{ch } \chi' \right) \varphi_\ell(\rho, \chi') = \quad (39) \\ = -V(\rho, \chi') \hat{A} \left(\hat{H}_{0,\ell}^{\text{rad}} \right) \varphi_\ell(\rho, \chi'),$$

$$\int_0^\infty d\chi (\text{sh } \chi)^{2\ell+2} (\text{ch } \chi' - \text{ch } \chi) \times \quad (40) \\ \times \left[\left(\frac{d}{d \text{ch } \chi} \right)^\ell \left(\frac{\sin \rho \chi}{\text{sh } \chi} \right) \right] \left(\frac{d}{d \text{ch } \chi} \right)^\ell \times \\ \times \frac{1}{\text{sh } \chi} \int_0^\infty d\rho' \frac{\rho' \sin(\rho' \chi)}{(-\rho')^{(\ell+1)}} \varphi_\ell(\rho', \chi') = \\ = V(\rho; \chi') \int_0^\infty d\chi (\text{sh } \chi)^{2\ell+2} \hat{A}(\text{ch } \chi) \times \\ \times \left[\left(\frac{d}{d \text{ch } \chi} \right)^\ell \left(\frac{\sin \rho \chi}{\text{sh } \chi} \right) \right] \left(\frac{d}{d \text{ch } \chi} \right)^\ell \times \\ \times \frac{1}{\text{sh } \chi} \int_0^\infty d\rho' \frac{\rho' \sin(\rho' \chi)}{(-\rho')^{(\ell+1)}} \varphi_\ell(\rho', \chi'),$$

где

$$\hat{H}_{0,\ell}^{\text{rad}} = \text{ch} \left(i \frac{d}{d\rho} \right) + \frac{\ell(\ell+1)}{2\rho(\rho+i)} \exp \left(i \frac{d}{d\rho} \right)$$

— радиальная часть оператора свободного гамильтониана (33), а оператор $\hat{A}$ по-прежнему определяется выражением (27), $\rho = r/\chi'$, χ' — быстрота, которая параметризует импульс и энергию:

$$\Delta_{q',m'\lambda_Q} = m' \text{sh } \chi' \mathbf{n}_{\Delta_{q',m'\lambda_Q}}, \quad (41)$$

$$|\mathbf{n}_{\Delta_{q',m'\lambda_Q}}| = 1, \quad M_Q = \frac{m'}{\mu} \Delta_{q',m'\lambda_Q}^0,$$

$$\Delta_{q',m'\lambda_Q}^0 = m' \text{ch } \chi',$$

а функция $(-\rho)^{(\ell)} = i^\ell \Gamma(\ell + i\rho) / \Gamma(i\rho)$ называется обобщенной степенью [10], где $\Gamma(z)$ — гамма-функция.

⁵⁾ Аналогичные формы уравнения для случая двух спиновых кварков равных масс были получены в [11].

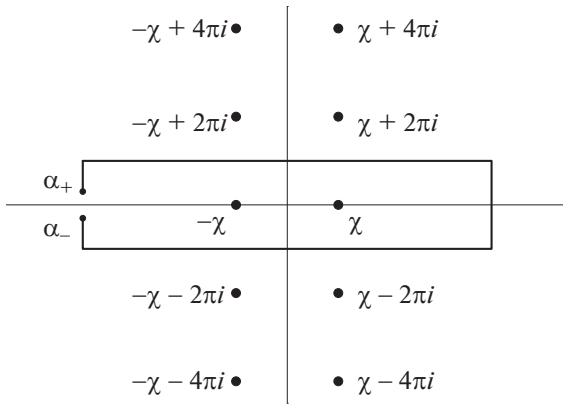


Рис. 2. Контур интегрирования в представлении (43) и сингулярности решения (46) в комплексной ζ -плоскости.

4. КУЛОНОВСКАЯ РАДИАЛЬНАЯ ВОЛНОВАЯ РКП-ФУНКЦИЯ

Радиальная волновая РКП-функция с относительным орбитальным моментом $\ell = 0$ для составной системы двух релятивистских спиновых кварков произвольных масс, взаимодействующих посредством кулоновоподобного хромодинамического потенциала (1), которая не содержит i -периодических констант, может быть найдена как решение интегрального уравнения (40), которое при относительном орбитальном моменте $\ell = 0$ и с потенциалом (1) принимает вид

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty d\chi (\operatorname{ch} \chi' - \operatorname{ch} \chi) \sin \rho \chi \times \\ & \times \int_0^\infty d\rho' \sin(\rho' \chi) \varphi_0(\rho', \chi') = \\ & = -\frac{\tilde{\alpha}'_s}{\rho} \int_0^\infty d\chi \hat{A}(\operatorname{ch} \chi) \sin \rho \chi \times \\ & \times \int_0^\infty d\rho' \sin(\rho' \chi) \varphi_0(\rho', \chi'), \quad \tilde{\alpha}'_s = \alpha_s m'. \end{aligned} \quad (42)$$

Решение уравнения (42) будем искать в виде контурного интеграла

$$\varphi_0(\rho, \chi') = \int_{\alpha_-}^{\alpha_+} d\zeta e^{i\rho\zeta} R_0(\zeta, \chi'), \quad (43)$$

где интегрирование выполняется в комплексной ζ -плоскости вдоль контура с концевыми точками $\alpha_\pm = -R \pm i\varepsilon$, $R \rightarrow +\infty$, $\varepsilon \rightarrow +0$ (см. рис. 2), т.е. подобно тому, как это делалось в работах [11, 18–21, 33].

Подставляя представление (43) в уравнение (42) и выполняя интегрирование с помощью соотно-

шения

$$\frac{1}{i\pi} \int_0^\infty d\rho' \sin(\rho' \chi) e^{i\rho' \zeta} = \frac{1}{i\pi} \frac{\chi}{\chi^2 - \zeta^2}, \quad \operatorname{Im} \zeta > 0,$$

приходим к уравнению

$$\begin{aligned} & \int_{\alpha_-}^{\alpha_+} d\zeta e^{i\rho\zeta} (\operatorname{ch} \chi' - \operatorname{ch} \zeta) R_0(\zeta, \chi') = \\ & = -\frac{\tilde{\alpha}'_s}{\rho} \int_{\alpha_-}^{\alpha_+} d\zeta e^{i\rho\zeta} \hat{A}(\operatorname{ch} \zeta) R_0(\zeta, \chi'), \end{aligned}$$

из которого после интегрирования по частям получаем для функции $R_0(\zeta, \chi')$ уравнение

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\zeta} [(\operatorname{ch} \zeta - \operatorname{ch} \chi') R_0(\zeta, \chi')] = \\ & = -i\tilde{\alpha}'_s \hat{A}(\operatorname{ch} \zeta) R_0(\zeta, \chi') \end{aligned} \quad (44)$$

с граничным условием

$$e^{i\rho\zeta} (\operatorname{ch} \zeta - \operatorname{ch} \chi') R_0(\zeta, \chi') \Big|_{\alpha_-}^{\alpha_+} = 0. \quad (45)$$

Решение уравнения (44) с граничным условием (45) дается выражением

$$\begin{aligned} & R_0(\zeta, \chi') = C_0(\chi') \times \\ & \times \frac{\exp \left[-\frac{i\tilde{\alpha}'_s a'}{4} \operatorname{sh} \zeta + (1 - i\tilde{\rho}') \zeta + iB' \chi' \right]}{(e^\zeta - e^{\chi'})^2} \times \\ & \times \left[\frac{e^\zeta - e^{-\chi'}}{e^\zeta - e^{\chi'}} \right]^{-1+iB'}, \end{aligned} \quad (46)$$

где $C_0(\chi')$ — произвольная функция от быстроты χ' , которая параметризует импульс и энергию в (41), значения параметров $\tilde{\rho}'$ и B' определяются выражениями

$$\tilde{\rho}' = \frac{\tilde{\alpha}'_s a' \operatorname{ch} \chi'}{4}, \quad B' = \frac{\tilde{\alpha}'_s (a' \operatorname{ch}^2 \chi' + b')}{4 \operatorname{sh} \chi'}, \quad (47)$$

т.е. как и в (4), но в которых $\chi = \chi'$, а входящие в них спиновые параметры a, b и параметр $\tilde{\alpha}_s$ теперь заменяются на их выражения в (28) и (42).

Напомним, что значения $\zeta = \pm \chi' + 2\pi ni$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) являются точками ветвления функции (46) (см. рис. 2). Контур интегрирования в представлении (43) не должен пересекать разрезы, которые проводятся от $-\infty + 2\pi ni$ до $\pm \chi' + 2\pi ni$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. В случае, когда взаимодействие выключено, $\alpha_s \rightarrow 0$, решение $\varphi_0(\rho, \chi')$ должно воспроизводить известную свободную волновую функцию

$$\lim_{\alpha_s \rightarrow 0} \varphi_0(\rho, \chi') \xrightarrow{\rho \rightarrow \infty} \frac{\sin(\rho \chi')}{\operatorname{sh} \chi'}, \quad (48)$$

поэтому выбираем $\alpha_{\pm} = -R \pm i\varepsilon$ при $R \rightarrow +\infty$, $\varepsilon \rightarrow +0$. Вертикальную и горизонтальную части контура интегрирования в правой его части нам удобно выбрать в виде $\text{Re} \zeta = +R$ и $\text{Im} \zeta = \pm\pi$ (см. рис. 2), т.е. как и в работах [11, 18–21, 33].

Наконец, после подстановки решения (46) в представление (43) и последующего ζ -интегрирования в комплексной плоскости вдоль контура с концевыми точками $\alpha_{\pm}$, т.е. также, как это делалось в работах [11, 18–21, 33], выражение для радиальной волновой РКП-функции $\varphi_0(\rho, \chi')$, не содержащее i -периодических констант, принимает вид

$$\varphi_0(\rho, \chi') = 2C_0(\chi') e^{iB'\chi'} \text{sh} [\pi(\rho - \tilde{\rho}')] \times \quad (49)$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\exp \left[\frac{i\tilde{\alpha}'_s a'}{4} \text{sh} x + (1 + i(\rho - \tilde{\rho}')) x \right]}{(e^x + e^{\chi'})^2} \times$$

$$\times \left[\frac{e^x + e^{-\chi'}}{e^x + e^{\chi'}} \right]^{-1+iB'}.$$

Нормировочный множитель $C_0(\chi')$ является действительным, а решение (49) отличается от решения в бесспиновом случае (см. работы [19–21, 33]) только наличием осциллирующего фактора $\exp[i\tilde{\alpha}'_s a' \text{sh}(x)/4]$ и при $a' = 0, b' = 2/g'$ — переходит в решение для бесспинового случая, где фактор g' определяется выражением (29). Более того, решение (49) по форме совпадает с решением для случая двух спиновых кварков равных масс [11]. Поэтому, как и в работе [11], вклад в интеграл от осциллирующего фактора $\exp[i\tilde{\alpha}'_s a' \text{sh}(x)/4]$ можно положить равным единице. Очевидно, что такая аппроксимация не только не нарушает свойств симметрии решения (49), но и позволяет представить выражение радиальной волновой РКП-функции для s -состояния через гипергеометрическую функцию, т.е. подобно тому, как это делалось в бесспиновом случае [19–21, 33],

$$\varphi_0(\rho, \chi') = C_0(\chi') e^{iB'\chi' - \chi' + i(\rho - \tilde{\rho}')\chi'} (\rho - \tilde{\rho}') \times \quad (50)$$

$$\times F \left(1 - iB', 1 - i(\rho - \tilde{\rho}'); 2; 1 - e^{-2\chi'} \right),$$

где действительный нормировочный множитель $2\pi C_0(\chi')$ дается выражением

$$|2\pi C_0(\chi')|^2 = e^{\pi B'} |\Gamma(1 - iB')|^2 \quad (51)$$

и находится из граничного условия (48) и асимптотики

$$\varphi_0(\rho, \chi')|_{\rho \gg 1} \approx \frac{2\pi C_0(\chi') e^{-\pi B'/2}}{\text{sh} \chi' |\Gamma(1 - iB')|} \times$$

$$\times \sin\{(\rho - \tilde{\rho}')\chi' + B' \ln[2(\rho - \tilde{\rho}') \text{sh} \chi'] + \arg \Gamma(1 - iB')\},$$

где $\Gamma(z)$ — гамма-функция.

Отметим, что при $\chi' = i\kappa$ ($0 < \kappa < \pi/2$) гипергеометрическая функция в решении (50) становится многочленом степени n , что приводит к точному условию квантования энергетических уровней для s -состояния составной системы двух релятивистских спиновых кварков произвольных масс, взаимодействующих посредством кулоновоподобного хромодинамического потенциала (1),

$$\frac{\tilde{\alpha}'_s(a' \cos^2 \kappa + b')}{4 \sin \kappa} = n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (52)$$

Условие квантования энергетических уровней (52) также может быть получено и при решении спектральной задачи для РКП-уравнения (39) с кулоновским потенциалом (1) при $\ell = 0$ (подобно тому, как это делалось в работе [11]). Решение спектральной задачи для парциальной волновой РКП-функции $\varphi_0(\rho, \kappa)$ имеет вид

$$\varphi_0(\rho, \kappa) = -\frac{C_0(\kappa)}{2} \int_{a_-}^{a_+} dt \times \quad (53)$$

$$\times \exp \left[-\rho t + \frac{\tilde{\alpha}'_s a'}{4} \sin t + \frac{\tilde{\alpha}'_s a' \cos \kappa}{4} t \right] \times$$

$$\times \left[\sin \left(\frac{t + \kappa}{2} \right) \right]^{iB'-1} \left[\sin \left(\frac{t - \kappa}{2} \right) \right]^{-iB'-1},$$

где быстрота $\chi' = i\kappa$ параметризует энергию $M_Q = (m^2/\mu) \cos \kappa$, $0 < \kappa < \pi/2$, а интегрирование выполняется в комплексной плоскости переменной t вдоль контура Γ с концевыми точками $a_{\pm} = +\infty \pm i\varepsilon$, $\varepsilon \rightarrow +0$, который лежит в полуплоскости $\text{Re} t \geq -\pi/2$ и содержит внутри себя особые точки $t = \kappa + 2\pi k$ ($k = 0, 1, \dots$) подынтегральной функции в решении (53).

Отметим, что решение спектральной задачи с кулоновским потенциалом (1) на основе интегрального уравнения (40), взятого при относительном орбитальном моменте $\ell = 0$, также приводит к решению (53).

Поскольку в силу условия квантования энергетических уровней (52) точки $t = \kappa + 2\pi k$ ($k = 0, 1, \dots$) являются полюсами $(n+1)$ -го порядка подынтегральной функции в решении (53), то контурный интеграл может быть легко вычислен с помощью теории вычетов. В частности, для основного уровня ($n = 1$) волновая РКП-функция $\varphi_0(\rho, \kappa)$ имеет вид

$$\varphi_0(\rho, \kappa_1) = \begin{cases} C_0(\kappa_1) \frac{(\rho - \rho'_{\kappa_1})\theta(\rho - \rho'_{\kappa_1}/2)}{1 - \exp[-2\pi(\rho - \rho'_{\kappa_1}/2)]} \exp[-(\rho - \rho'_{\kappa_1})\kappa_1]; \\ C_0(\kappa_1)(\rho - \rho'_{\kappa_1})\theta(-\rho + \rho'_{\kappa_1}/2) \exp[-(\rho - \rho'_{\kappa_1})\kappa_1], \\ \rho'_{\kappa_1} = \tilde{\alpha}'_s a' \cos(\kappa_1)/2, \end{cases} \quad (54)$$

причем $\rho'_{\kappa_1} > 0$ для $\hat{O} = \gamma_5$ и γ_μ , но $\rho'_{\kappa_1} < 0$ для $\hat{O} = \gamma_5 \gamma_\mu$.

Таким образом, волновая РКП-функция основного состояния имеет нуль на конечном расстоянии при положительных значениях параметра a' , когда $\hat{O} = \gamma_5$ или γ_μ , и не имеет нуля при отрицательном значении параметра a' , когда $\hat{O} = \gamma_5 \gamma_\mu$ ⁶. Более того, из выражения (54) следует, что при $a' > 0$ происходит фрагментация кварк-глюонной материи основного состояния связанной системы с энергией $M_Q = (m'^2/\mu) \cos \kappa_1$ на две фракции: одна из фракций распределена внутри сферы (ядро) радиуса $\rho = \rho'_{\kappa_1}/2$, а другая — в сферическом слое (мантия) $\rho'_{\kappa_1}/2 < \rho < \rho'_{\kappa_1}$. При этом значение параметра $\rho'_{\kappa_1} = \tilde{\alpha}'_s a' \cos(\kappa_1)/2$ при $a' > 0$ определяет “размер” основного состояния связанной системы с энергией $M_Q = (m'^2/\mu) \cos \kappa_1$ и является точкой разрыва эффективного потенциала (рис. 3)

$$V_{\text{eff}}(\rho) = -\frac{\tilde{\alpha}'_s a'}{4(\rho - \rho'_{\kappa_1})}$$

с предельной точкой $\rho'_0 = \tilde{\alpha}'_s a'/2$ ($\kappa_1 = 0$), разделяющей область конфаймента (область связанных состояний) и область континуума (область рассеяния).

5. ПОРОГОВЫЙ РЕСУММИРУЮЩИЙ S-ФАКТОР

Принимая во внимание соотношения (10) и (11), пороговый ресуммирующий S -фактор составной системы двух релятивистских спиновых кварков произвольных масс, как и в случае спиновых кварков равных масс [13], определим выражением

$$S_{\text{uneq},s}(\chi') = \lim_{\rho \rightarrow i} \left| e^{-\pi \tilde{\rho}'/2} \Gamma(1 + i \tilde{\rho}') \frac{\varphi_0(\rho, \chi')}{\rho} \right|^2, \quad (55)$$

где дополнительный фактор $\exp(-\pi \tilde{\rho}'/2) \Gamma(1 + i \tilde{\rho}')$ обеспечивает не только правильный релятивистский предел при $\chi' \rightarrow +\infty$, равный 1, но и переход

к бесспиновому случаю при $a' = 0$ и $b' = 2/g'$. Таким образом, в рассматриваемом спиновом случае функция

$$\psi_0(\rho, \chi') = e^{-\pi \tilde{\rho}'/2} \Gamma(1 + i \tilde{\rho}') \varphi_0(\rho, \chi')$$

представляет собой физическую волновую функцию s -состояния составной системы двух релятивистских спиновых кварков произвольных масс, взаимодействующих посредством кулоновоподобного хромодинамического потенциала (1).

Тогда, используя соотношения (50), (51) и (55), получаем следующее выражение для порогового ресуммирующего S -фактора составной системы двух релятивистских спиновых кварков произвольных масс:

$$S_{\text{uneq},s}(\chi') = \frac{X_{\text{uneq},s}(\chi')}{1 - \exp[-X_{\text{uneq},s}(\chi')]} \times \quad (56)$$

$$\times e^{-\pi \tilde{\rho}'} \left| \Gamma(2 + i \tilde{\rho}') F(1 + i B', -i \tilde{\rho}'; 2; 1 - e^{-2\chi'}) \right|^2,$$

где

$$X_{\text{uneq},s}(\chi') = 2\pi B' = \frac{\pi \tilde{\alpha}'_s (a' \text{ch}^2 \chi' + b')}{2 \text{sh} \chi'}. \quad (57)$$

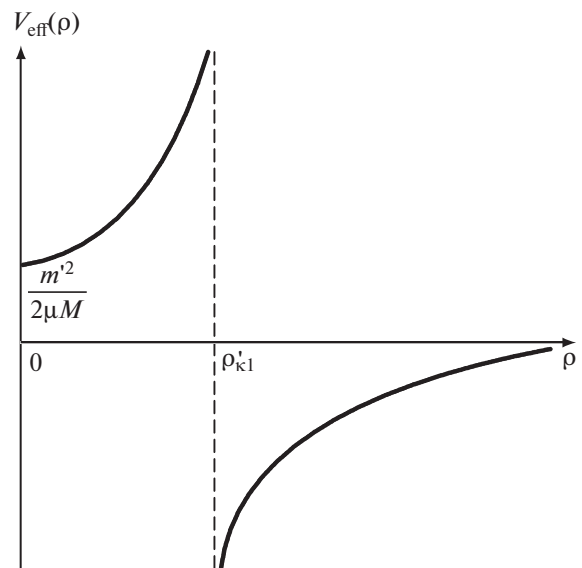


Рис. 3. Поведение эффективного взаимодействия в случае кулоновоподобного потенциала (1) при положительных значениях параметра a' с сингулярностью на конечном расстоянии.

⁶Аналогичный результат для случая двух спиновых кварков равных масс был получен в [11, 12].

Пороговый S -фактор (56) может быть выражен в терминах скорости u в (8) и относительной скорости u'_{rel} эффективной релятивистской частицы массы m' , выступающей в качестве двухчастичной связанной системы, которая определяется выражением [19–21]

$$u'_{\text{rel}} = \frac{2u}{\sqrt{1-u^2}}. \quad (58)$$

В частности, величина (57) в терминах скорости u и относительной скорости u'_{rel} принимает вид

$$\begin{aligned} X_{\text{uneq},s}(u) &= \\ &= \frac{\pi \tilde{\alpha}'_s \sqrt{1-u^2}}{2g'u} \left[g'^2 (a' + b') + \frac{a'u^2}{1-u^2} \right] = \\ &= \frac{\pi \tilde{\alpha}'_s}{g'u'_{\text{rel}}} \left[g'^2 (a' + b') + \frac{a'}{4} u'^2_{\text{rel}} \right]. \end{aligned}$$

Здесь кинематический фактор g' определяется выражением (29) и устанавливает связь между полной энергией $\sqrt{s_k}$ составной системы двух релятивистских спиновых кварков произвольных масс и полной энергией $2\Delta^0_{k',m'\lambda_Q}$ эффективной релятивистской частицы массы m' с импульсом $\Delta_{k',m'\lambda_Q}$ (см. (19)), что отражает асимметрию между этими двумя системами. Кроме того, фактор (29) представляет собой отношение среднего арифметического масс кварков к их среднему геометрическому, а, значит, он описывает асимметрию составной системы двух релятивистских спиновых кварков произвольных масс, причем $g' \geq 1 \forall m_1, m_2$, а равенство имеет место (асимметрии нет) только при $m_1 = m_2 = m$. С другой стороны, кинематический фактор g' можно рассматривать и как отношение гиромагнитного отношения орбитального момента составной системы (мезона) с приведенной массой μ и зарядом e , равного $g_L = e/2\mu c$, где c — скорость света, к гиромагнитному отношению для спинового момента эффективной релятивистской частицы массы m' и с таким же зарядом e , равному $g_s = e/m'c$. Также фактор g' , и это важно, устанавливает явную зависимость спиновых параметров a', b' в (28) от масс m_1, m_2 релятивистских спиновых кварков, образующих составную систему, причем при $m_1 = m_2 = m$ фактор $g' = 1$ и, следовательно, в этом случае значения параметров a', b' , как это видно из (5) и (28), определяются только собственными спинами кварков.

Отметим, что пороговый S -фактор (56) имеет явно выраженный релятивистский характер, поскольку как аргумент r (модуль радиуса-вектора $\mathbf{r}$) в кулоновском потенциале (1), так и релятивистская относительная скорость $\mathbf{v}$ взаимодействующих частиц являются релятивистскими инвариантами [41], а, значит, в силу соотношения $|\mathbf{v}| = 2u/(1+u^2)$, скорость u в (8) и относительная скорость u'_{rel} эффективной релятивистской частицы в (58) также обладают этим свойством [19–21]. При этом роль параметра скорости в S -факторе (56) теперь играет не релятивистская относительная скорость $\mathbf{v}$ взаимодействующих частиц, а скорость (58) эффективной релятивистской частицы, выступающей в качестве двухчастичной системы.

Новый релятивистский пороговый ресуммирующий S -фактор (56) для составной системы двух релятивистских спиновых кварков произвольных масс имеет следующие важные свойства:

1) при $m_1 = m_2 = m$ S -фактор (56) совпадает со спиновым S -фактором (2), который при $a = 0$ и $b = 2$ переходит в бесспиновый S -фактор (6), воспроизводящий в нерелятивистском пределе ($v \rightarrow 0$) известный нерелятивистский результат [19–21];

2) при $m_1 \neq m_2$ и $a' = 0, b' = 2/g'$ S -фактор (56) совпадает с бесспиновым S -фактором (7);

3) в нерелятивистском пределе $\chi' \rightarrow +0$ ($u \rightarrow 0$) его поведение дается выражением

$$\begin{aligned} S_{\text{uneq},s}(\chi')|_{\chi' \rightarrow +0} &\approx \\ &\approx \frac{\pi \tilde{\alpha}'_s (a' + b')/2 \operatorname{sh} \chi'}{1 - \exp[-\pi \tilde{\alpha}'_s (a' + b')/2 \operatorname{sh} \chi']} \times \\ &\times \frac{\pi \tilde{\alpha}'_s a'/2}{\exp(\pi \tilde{\alpha}'_s a'/2) - 1} \left(1 + \frac{(\tilde{\alpha}'_s a')^2}{16} \right) \\ &\times |\Phi(-i\tilde{\alpha}'_s a'/4; 2; i\tilde{\alpha}'_s (a' + b')/2)|^2, \end{aligned}$$

которое при $m_1 = m_2 = m, a' = a = 0$ и $b' = b = 2$, как было отмечено выше, воспроизводит известный нерелятивистский результат [19–21], где $\Phi(\alpha; \beta; z)$ — вырожденная гипергеометрическая функция;

4) в релятивистском пределе $\chi' \rightarrow +\infty$ ($u \rightarrow 1$) его поведение имеет асимптотику

$$S_{\text{uneq},s}(\chi')|_{\chi' \gg 1} \approx \frac{2\pi(B' - \tilde{\rho}')}{1 - \exp[-2\pi(B' - \tilde{\rho}')] }|_{\chi' \gg 1} \approx 1 + \frac{\pi \tilde{\alpha}'_s}{4} (a' + 2b') e^{-\chi'} \xrightarrow{\chi' \rightarrow +\infty} \quad (59)$$

$$\xrightarrow{\chi' \rightarrow +\infty} \begin{cases} 1 + 0 & \text{при } \hat{O} = \gamma_5 \text{ (псевдоскаляр) и } 1 \leq g' \leq \sqrt{2}, \\ 1 - 0 & \text{при } \hat{O} = \gamma_5 \text{ (псевдоскаляр) и } g' > \sqrt{2}, \\ 1 + 0 & \text{при } \hat{O} = \gamma_\mu \text{ (вектор) и } 1 \leq g' \leq \sqrt{3}, \\ 1 - 0 & \text{при } \hat{O} = \gamma_\mu \text{ (вектор) и } g' > \sqrt{3}; \\ 1 + 0 & \text{при } \hat{O} = \gamma_5 \gamma_\mu \text{ (псевдовектор) и } g' \geq 1, \end{cases}$$

которая отвечает соответствующим значениям спиновых параметров a' и b' в (28), являющихся функциями параметра g' , а, значит, масс кварков;

5) случай, когда одна из частиц покоится, означает, что $m_1 \rightarrow +\infty$, а другая частица имеет массу m_2 и импульс $\mathbf{k}$, что дает предельное значение для скорости u :

$$u \xrightarrow{m_1 \rightarrow +\infty} \frac{|\mathbf{k}|}{\sqrt{m_2^2 + \mathbf{k}^2} + m_2};$$

6) в ультрарелятивистском пределе, как это было доказано [45, 46], спектр связанных состояний исчезает, когда масса $m' \rightarrow 0$, так как масса частицы является единственным размерным параметром. Эта особенность отражает существенное различие между потенциальными моделями и квантовой теорией поля, где появляется дополнительный размерный параметр. Кроме того, мы можем также заключить, что S -фактор (56), который соответствует непрерывному спектру, будет стремиться к 1 при $m' \rightarrow 0$.

Таким образом, установлена зависимость релятивистского порогового ресуммирующего S -фактора (56) как от скорости u в (8) или относительной скорости u'_{rel} эффективной релятивистской частицы в (58), так и от спиновых параметров a' и b' , а, значит, и от различия масс кварков составной системы (фактор g'). Выполненный анализ поведения S -фактора (56) в нерелятивистском ($u \rightarrow 0$), релятивистском ($u \rightarrow 1$) и в ультрарелятивистском ($m' \rightarrow 0$) пределах показал, что он воспроизводит как известный нерелятивистский предел в бесспиновом случае, когда $m_1 = m_2 = m, a' = a = 0$ и $b' = b = 2$, так и ожидаемые релятивистский и ультрарелятивистский пределы для всех трех случаев спиновых структур мезонов: псевдоскаляра, вектора и псевдовектора. Более того, из асимптотики (59) следует, что новый пороговый S -фактор (56) в релятивистском пределе ($u \rightarrow 1$) стремится к единице снизу для псевдоскаляра ($\hat{O} = \gamma_5$) при $g' > \sqrt{2}$, а для вектора ($\hat{O} = \gamma_\mu$) — при $g' > \sqrt{3}$. Это означает, что для этих значений фактора g' (а, следовательно, масс кварков) существуют такие “критические” значения быстроты χ' ,

при которых S -фактор (56), отвечающий случаю псевдоскаляра и вектора, будет обращаться в единицу, приближаясь в пределе при $\chi' \rightarrow +\infty$ к единице снизу. Тем самым, для псевдоскалярного и векторного мезонов мы обнаружили новые закономерности и эффекты, обусловленные их спиновыми параметрами a', b' , зависящими от фактора g' .

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе найдены точные решения задачи рассеяния и спектральной задачи для s -состояния составной системы двух релятивистских спиновых кварков произвольных масс, взаимодействующих посредством кулоновоподобного хромодинамического потенциала (1). Рассмотрены случаи, когда квазипотенциал имеет биспинорную структуру вида $I \otimes I$, а спинорная структура вершинной функции пропорциональна матрице $\hat{O}$, не зависящей от импульсных переменных, где в качестве $\hat{O}$ выбирались матрицы Дирака γ_5, γ_μ и $\gamma_5 \gamma_\mu$ ($\mu = 0, 1, 2, 3$). Такой выбор матрицы $\hat{O}$ для рассматриваемых спиновых структур мезонов позволил найти точные решения РКП-уравнения в конфигурационном представлении для волновой функции s -состояния мезонов, как составной системы двух релятивистских спиновых кварков произвольных масс, взаимодействующих посредством кулоновоподобного хромодинамического потенциала (1), и определить для них условия квантования энергетических уровней. Для этих спиновых структур мезонов получены выражения для релятивистского порогового ресуммирующего S -фактора, отвечающего кулоновоподобному хромодинамическому потенциалу, и исследованы его свойства. Рассмотрение было выполнено в рамках релятивистского квазипотенциального подхода, основанного на ковариантной гамильтоновой формулировке квантовой теории поля, путем перехода к трехмерному релятивистскому конфигурационному представлению [40, 41] для случая составной системы двух релятивистских спиновых частиц произвольных масс.

Показано, что при положительных значениях параметра a' волновая РКП-функция основного

состояния имеет нуль на конечном расстоянии $\rho = \tilde{\alpha}'_s a' \cos(\kappa_1)/2$, когда $\hat{O} = \gamma_5$ и γ_μ , и не имеет нуля при отрицательном значении параметра a' , когда $\hat{O} = \gamma_5 \gamma_\mu$. Установлено, что при $a' > 0$ происходит фрагментация кварк-глюонной материи основного состояния связанной системы с энергией $M_Q = (m'^2/\mu) \cos \kappa_1$ на две фракции: одна из фракций распределена внутри сферы (ядро) радиуса $\rho = \rho'_{\kappa_1}/2$, а другая — в сферическом слое (мантия) $\rho'_{\kappa_1}/2 < \rho < \rho'_{\kappa_1}$. При этом значение параметра $\rho'_{\kappa_1} = \tilde{\alpha}'_s a' \cos(\kappa_1)/2$ при $a' > 0$ определяет “размер” основного состояния связанной системы с энергией $M_Q = (m'^2/\mu) \cos \kappa_1$ и является точкой разрыва эффективного потенциала с предельной точкой $\rho'_0 = \tilde{\alpha}'_s a'/2$, разделяющей область конфаймента (область связанных состояний) и область континуума (область рассеяния).

Установлена зависимость нового релятивистского порогового ресуммирующего S -фактора (56) от спиновых параметров a' и b' , содержащих кинематический фактор g' , который указывает на связь между спинами и массами кварков, образующих составную систему. Показано, что фактор g' устанавливает связь между полной энергией эффективной релятивистской частицы массы m' и полной энергией составной системы двух релятивистских спиновых кварков произвольных масс, и он отражает как асимметрию их масс, так и асимметрию их гироманнитных отношений.

Показано, что новый пороговый S -фактор (56) имеет явно выраженный релятивистский характер, причем роль параметра скорости в нем теперь играет не релятивистская относительная скорость $\mathbf{v}$ взаимодействующих частиц, а скорость (58) эффективной релятивистской частицы, выступающей в качестве двухчастичной системы.

Установлена связь нового S -фактора (56) с ранее найденными S -факторами как для случая спиновых кварков равных масс, так и для бесспиновых кварков произвольных и равных масс. Выполнен анализ его поведения в нерелятивистском ($u \rightarrow 0$), релятивистском ($u \rightarrow 1$) и в ультра-релятивистском ($m' \rightarrow 0$) пределах. Показано, что он воспроизводит не только известный нерелятивистский предел в бесспиновом случае, когда $m_1 = m_2 = m$, $a' = a = 0$ и $b' = b = 2$, но и ожидаемые релятивистский и ультра-релятивистский пределы для всех трех случаев спиновых структур мезонов: псевдоскаляра, вектора и псевдовектора.

Детальный анализ поведения нового S -фактора (56) в релятивистском пределе ($u \rightarrow 1$) показал, что он стремится к единице снизу для псевдоскаляра ($\hat{O} = \gamma_5$) при $g' > \sqrt{2}$, а для вектора ($\hat{O} = \gamma_\mu$) — при $g' > \sqrt{3}$. Для этих значений фактора

g' , а, следовательно, масс кварков, существуют “критические” значения быстроты χ' , при которых S -фактор (56), отвечающий случаю псевдоскаляра и вектора, обращается в единицу, приближаясь в пределе при $\chi' \rightarrow +\infty$ к единице снизу. Такая особенность поведения S -фактора (56) для псевдоскалярного и векторного мезонов указывает на новые закономерности и эффекты, обусловленные различием масс кварков (фактор g').

Поскольку новый S -фактор (56) получен нами в рамках полностью ковариантного метода, то можно ожидать, что он более полно учитывает как релятивистский характер кварков составной системы, так и эффекты, обусловленные их спинами и различием их масс.

Автору приятно выразить искреннюю благодарность О.П. Соловцовой за поддержку и интерес к этой работе, полезные обсуждения, стимулирующие дискуссии и ценные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. A. A. Logunov and A. N. Tavkhelidze, *Nuovo Cimento* **29**, 380 (1963).
2. V. G. Kadyshevsky, *Nucl. Phys. B* **6**, 125 (1968).
3. V. G. Kadyshevsky and M. D. Mateev, *Nuovo Cimento A* **55**, 275 (1967).
4. В. Г. Кадышевский, *ЖЭТФ* **46**, 654, 872 (1964) [*Sov. Phys. JETP* **19**, 443, 597 (1964)]; Докл. АН СССР **160**, 573 (1965) [*Sov. Phys. Dokl.* **10**, 46 (1965)].
5. Н. Б. Скачков, И. Л. Соловцов, *ЯФ* **31**, 1332 (1980) [*Sov. J. Nucl. Phys.* **31**, 686 (1980)].
6. Н. Б. Скачков, И. Л. Соловцов, *ТМФ* **43**, 330 (1980) [*Theor. Math. Phys.* **43**, 494 (1980)].
7. А. Д. Линкевич, В. И. Саврин, Н. Б. Скачков, *ТМФ* **53**, 20 (1982) [*Theor. Math. Phys.* **53**, 955 (1982)].
8. В. А. Матвеев, В. И. Саврин, А. Н. Сисакян, А. Н. Тавхелидзе, *ТМФ* **132**, 267 (2002) [*Theor. Math. Phys.* **132**, 1119 (2002)].
9. D. Ebert, R. N. Faustov, and V. O. Galkin, *Phys. Lett. B* **635**, 93 (2006); *ЭЧАЯ* **41**, 1579 (2010).
10. V. G. Kadyshevsky, R. M. Mir-Kasimov, and N. B. Skachkov, *Nuovo Cimento A* **55**, 233 (1968).
11. Ю. Д. Черниченко, *ЯФ* **80**, 396 (2017) [*Phys. At. Nucl.* **80**, 707 (2017)].
12. N. B. Skachkov and I. L. Solovtsov, Preprint No. E2-81-760, JINR (Dubna, 1981); Н. Б. Скачков, И. Л. Соловцов, *ТМФ* **54**, 183 (1983) [*Theor. Math. Phys.* **54**, 116 (1983)].
13. Ю. Д. Черниченко, *ЯФ* **82**, 172 (2019) [*Phys. At. Nucl.* **82**, 158 (2019)].
14. M. Freeman, M. D. Mateev, and R. M. Mir-Kasimov, *Nucl. Phys. B* **12**, 197 (1969).
15. В. Г. Кадышевский, Р. М. Мир-Касимов, М. Фриман, *ЯФ* **9**, 646 (1969).
16. N. B. Skachkov and I. L. Solovtsov, Preprint No. E2-11727, JINR (Dubna, 1978); Н. Б. Скачков, И. Л. Соловцов, *ЯФ* **30**, 1079 (1979) [*Sov. J. Nucl. Phys.* **30**, 562 (1979)].

17. N. B. Skachkov and I. L. Solovtsov, Preprint No. E2-11678, JINR (Dubna, 1978); Н. Б. Скачков, И. Л. Соловцов, ТМФ **41**, 205 (1979) [Theor. Math. Phys. **41**, 977 (1979)].
18. K. A. Milton and I. L. Solovtsov, Mod. Phys. Lett. A **16**, 2213 (2001).
19. О. П. Соловцова, Ю. Д. Черниченко, ЯФ **73**, 1658 (2010) [Phys. At. Nucl. **73**, 1612 (2010)]; arXiv:0904.0754v1.
20. О. П. Соловцова, Ю. Д. Черниченко, ТМФ **166**, 225 (2011) [Theor. Math. Phys. **166**, 194 (2011)].
21. Ю. Д. Черниченко, *Релятивистский квазипотенциальный подход в задачах рассеяния* (Изд. центр УО ГГТУ им. П. О. Сухого, Гомель, 2011).
22. T. Appelquist and H. D. Politzer, Phys. Rev. Lett. **34**, 43 (1975); Phys. Rev. D **12**, 1404 (1975).
23. E. C. Poggio, H. R. Quinn, and S. Weinberg, Phys. Rev. D **13**, 1958 (1976).
24. J. Schwinger, *Particles, Sources, and Fields* (Addison-Wesley, New York, 1973), Vol. II.
25. G. Gamov, Z. Phys. **51**, 204 (1928).
26. A. Sommerfeld, *Atombau und Spektrallinien* (Vieweg, Braunschweig, 1939), Vol. II.
27. A. D. Sakharov, ЖЭТФ **18**, 631 (1948).
28. B. С. Фадин, В. А. Хозе, ЯФ **48**, 487 (1988); V. S. Fadin, V. A. Khoze, and T. Sjostrand, Z. Phys. C **48**, 613 (1990).
29. V. S. Fadin, V. A. Khoze, A. D. Martin, and A. Chapovsky, Phys. Rev. D **52**, 1377 (1995).
30. A. H. Hoang, Phys. Rev. D **56**, 7276 (1997).
31. J.-H. Yoon and C.-Y. Wong, Phys. Rev. C **61**, 044905 (2000); J. Phys. G **31**, 149 (2005).
32. A. B. Arbuzov, Nuovo Cimento A **107**, 1263 (1994).
33. И. Л. Соловцов, Ю. Д. Черниченко, в сб.: *Труды международного семинара по современным вопросам физики элементарных частиц, посвященный памяти И. Л. Соловцова, Дубна, 15–18 янв. 2008*, Препринт Д4-2008-65, ОИЯИ (Дубна, 2008), с. 73.
34. R. Barbieri, P. Christillin, and E. Remiddi, Phys. Rev. A **8**, 2266 (1973).
35. V. I. Savrin and N. B. Skachkov, Lett. Nuovo Cimento **29**, 363 (1980).
36. K. A. Milton, I. L. Solovtsov, and O. P. Solovtsova, Phys. Rev. D **64**, 016005 (2001).
37. I. L. Solovtsov and O. P. Solovtsova, Nonlin. Phenom. Complex Syst. **5**, 51 (2002).
38. K. A. Milton, I. L. Solovtsov, and O. P. Solovtsova, Mod. Phys. Lett. A **21**, 1355 (2006).
39. K. A. Milton, in *Proceedings of the International Seminar Denoted to the Memory of I. L. Solovtsov, Dubna, 15–18 Jan. 2008*, Preprint No. D4-2008-65, JINR (Dubna, 2008), p. 82.
40. В. Г. Кадышевский, М. Д. Матеев, Р. М. Мир-Касимов, ЯФ **11**, 692 (1970) [Sov. J. Nucl. Phys. **11**, 388 (1970)].
41. В. Г. Кадышевский, Р. М. Мир-Касимов, Н. Б. Скачков, ЭЧАЯ **2**, 635 (1972) [Sov. J. Part. Nucl. **2**, 69 (1972)].
42. Ю. Д. Черниченко, ЯФ **77**, 251 (2014) [Phys. At. Nucl. **77**, 229 (2014)].
43. Ю. Д. Черниченко, ЯФ **78**, 226 (2015) [Phys. At. Nucl. **78**, 201 (2015)].
44. И. С. Шапиро, Докл. АН СССР **106**, 647 (1956) [Sov. Phys. Dokl. **1**, 91 (1956)]; ЖЭТФ **43**, 1727 (1962) [Sov. Phys. JETP **16**, 1219 (1963)].
45. W. Lucha and F. F. Schöberl, Phys. Rev. Lett. **64**, 2733 (1990).
46. W. Lucha and F. F. Schöberl, Phys. Lett. B **387**, 573 (1996).

WAVE FUNCTIONS AND S FACTOR FOR A SYSTEM OF TWO RELATIVISTIC SPINOR QUARKS WITH ARBITRARY MASSES

Yu. D. Chernichenko

*P. Sukhoi Gomel State Technical University, Belarus;
International Center for Advanced Studies, Gomel, Belarus*

In the framework of the Hamiltonian formulation of quasipotential approach in quantum field theory by transition to the three-dimensional relativistic configurational representation the exact solutions of the covariant two-particle equations, mass spectrum, and S factor are obtained for a system of two relativistic spin-1/2 quarks with arbitrary masses interacting via a Coulomb-like chromodynamical potential. The cases of the pseudoscalar, vector, and pseudovector are considered. The new regularities has been installed in behavior of threshold resummation S -factor.