

## СКАЛЯРНЫЙ ФОРМФАКТОР СВЯЗАННОГО СОСТОЯНИЯ ДВУХ ФЕРМИОНОВ В РЕЛЯТИВИСТСКОМ КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНОМ ПОДХОДЕ

© 2018 г. Ю. Д. Черниченко

Гомельский государственный технический университет, Беларусь

E-mail: chern@gstu.by; chyud@mail.ru

Поступила в редакцию 26.12.2017 г.

Получено новое выражение скалярного формфактора связанной системы двух релятивистских фермионов равных масс. Рассмотрение проводится в рамках релятивистского квазипотенциального подхода, основанного на ковариантной гамильтоновой формулировке квантовой теории поля, путем перехода к трехмерному релятивистскому конфигурационному представлению для случая взаимодействия двух релятивистских спиновых частиц равных масс.

DOI: 10.7868/S004400271803008X

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Для описания поведения формфакторов часто используются различные полюсные модели векторной доминантности. Эти модели успешно воспроизводят поведение пионного формфактора как в пространственноподобной, так и во времениподобной областях [1], а поведение нуклонного формфактора – в пространственноподобной области [2]. Однако эти модели не могут объяснить экспериментально наблюдаемого быстрого убывания электромагнитного протонного формфактора во времениподобной области по дипольному закону  $\sim t^{-2}$  при больших значениях квадрата переданного 4-импульса  $-t = Q^2$ . Причина такого поведения протонного формфактора состоит в том, что модель векторной доминантности предполагает, что налетающий на нуклон виртуальный фотон “видит” только векторные мезоны – связанные состояния кварка и антикварка, в то время как исследуется структура нуклона на малых расстояниях, где переданные 4-импульсы достаточно велики, а кварки движутся квазисвободно (асимптотическая свобода).

Для устранения недостатка векторно-доминантной модели при описании поведения барионного и нуклонного электромагнитных формфакторов во времениподобной области вблизи их порога был предложен другой метод [3–5]. В этом методе барионный (нуклонный) электромагнитный формфактор во времениподобной области вблизи  $B\bar{B}$  ( $N\bar{N}$ )-порога представляется как произведение фактора, соответствующего сингулярности амплитуды перехода, лежащей вдали от  $B\bar{B}$  ( $N\bar{N}$ )-порога, и фактора,

отвечающего за сильное конечное состояние взаимодействия. Этот последний фактор дает энергетическую зависимость формфактора.

Иной метод для ковариантного описания формфакторов составных систем был предложен в работах [6–10]. Развитый в этих работах метод основан на релятивистском квазипотенциальном (РКП) подходе [11] в квантовой теории поля, который был предложен Логуновым и Тавхелидзе в рамках одновременной формулировки проблемы двух тел. Однако использование уравнения Логунова–Тавхелидзе для волновой функции в импульсном представлении не позволило исследовать поведение формфактора в широком интервале значений квадрата переданного 4-импульса. Другая модель учета вклада малых расстояний в формфактор протона была рассмотрена в работе [12]. Эта модель использует РКП-подход [13], возникающий в терминах ковариантной гамильтоновой формулировки квантовой теории поля [14], путем перехода от импульсной формулировки в пространстве Лобачевского к трехмерному релятивистскому конфигурационному представлению, введенному в работе [15] для случая взаимодействия двух релятивистских бесспиновых частиц равных масс  $m$ . Подчеркнем, что в этом методе роль естественного масштаба играет комптоновская длина волны частицы, причем модель в [12] учитывает как вклад в формфактор протона векторных мезонов, так и вклад от центральной части протона, радиус которой равен его комптоновской длине волны. Предложенный в [15] метод перехода к релятивистскому конфигурационному представлению для случая взаимодействия двух релятивистских бесспиновых частиц равных масс был использован в [16] для построения трехмерного

ковариантного формализма описания двухчастичных релятивистских систем. В рамках этого формализма были получены выражения формфакторов релятивистских двухчастичных систем [17, 18]. Выражения упругих формфакторов связанной системы двух релятивистских бесспиновых частиц произвольных масс для случая скалярного и векторного токов были получены в работах [19, 20]. Для этого был использован РКП-подход на основе гамильтоновой формулировки квантовой теории поля [13, 14] путем перехода к трехмерному релятивистскому конфигурационному представлению для случая взаимодействия двух релятивистских бесспиновых частиц произвольных масс [21, 22].

Настоящая работа может рассматриваться как продолжение работ [19, 20, 23]. Для описания упругого формфактора системы, состоящей из двух релятивистских частиц равных масс со спином 1/2 (например, кварка и антикварка), мы будем использовать РКП-подход [13, 24], основанный на гамильтоновой формулировке квантовой теории поля [14], путем перехода к трехмерному релятивистскому конфигурационному представлению для случая взаимодействия двух релятивистских спиновых частиц равных масс  $m$  [15].

## 2. УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ВОЛНОВОЙ ФУНКЦИИ

В рамках РКП-подхода [13, 24] полностью ковариантное двухчастичное трехмерное РКП-уравнение в пространстве моментов совпадает по форме с аналогичными уравнениями, полученными в [10, 11, 16, 17, 25] в рамках одновременного РКП-подхода Логунова–Тавхелидзе. Тем самым двухчастичная задача сводится к одночастичной, описание которой ведется на языке волновой РКП-функции одной релятивистской частицы, удовлетворяющей полностью ковариантному трехмерному РКП-уравнению в пространстве моментов. Более того, РКП-подход для случая взаимодействия двух релятивистских частиц равных масс  $m_1 = m_2 = m$ , развитый в работах [13, 14], позволяет перейти от импульсной формулировки в пространстве Лобачевского к трехмерному релятивистскому конфигурационному представлению, введенному в [15] для случая взаимодействия двух релятивистских частиц равных масс. Для сферически симметричных потенциалов конечно-разностная форма релятивистского уравнения Шредингера для волновой функции в конфигурационном представлении имеет вид [23]<sup>1)</sup>

$$\frac{1}{2m} \left( M_Q - \hat{H}_0 \right) \Psi_{M_Q}(\mathbf{r}) = V(\mathbf{r}; M_Q) \hat{A} \left( \frac{\hat{H}_0}{2m} \right) \Psi_{M_Q}(\mathbf{r}). \quad (1)$$

<sup>1)</sup> Мы будем всюду использовать систему единиц, в которой положено:  $\hbar = c = 1$ .

Здесь  $M_Q^2 = s_q = Q^2 = (q_1 + q_2)^2 = Q_0^2 - \mathcal{Q}^2$ , где  $q_i, i = 1, 2 - 4$ -импульсы составляющих, оператор

$$\hat{H}_0 = 2m \left[ \text{ch} \left( i\lambda \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{i\lambda}{r} \text{sh} \left( i\lambda \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{\lambda^2}{2r^2} \Delta_{\theta, \varphi} \exp \left( i\lambda \frac{\partial}{\partial r} \right) \right] \quad (2)$$

– оператор свободного гамильтониана, являющийся конечно-разностным оператором, построенным из операторов сдвига  $\exp(\pm i\lambda \partial/\partial r)$ , в то время как  $\Delta_{\theta, \varphi}$  – его угловая часть, причем  $\lambda = 1/m$  – комптоновская длина волны, а модуль радиуса-вектора  $\mathbf{r}$  ( $\mathbf{r} = r\mathbf{n}$ ,  $|\mathbf{n}| = 1$ ) является релятивистским инвариантом; квазипотенциал  $V(\mathbf{r}; M_Q)$  является локальным в смысле геометрии Лобачевского, а оператор  $\hat{A}$  определяется выражением

$$\hat{A} \left( \frac{\hat{H}_0}{2m} \right) = \frac{1}{4} \left[ a \left( \frac{\hat{H}_0}{2m} \right)^2 + b \right], \quad (3)$$

$$a = \begin{cases} 1 & \text{при } \hat{O} = \gamma_5 \text{ (псевдоскаляр);} \\ \frac{1}{2} & \text{при } \hat{O} = \gamma_\mu \text{ (вектор);} \\ -\frac{1}{2} & \text{при } \hat{O} = \gamma_5 \gamma_\mu \text{ (псевдовектор);} \end{cases}$$

$$b = \begin{cases} 0 & \text{при } \hat{O} = \gamma_5 \text{ (псевдоскаляр);} \\ \frac{1}{4} & \text{при } \hat{O} = \gamma_\mu \text{ (вектор);} \\ \frac{3}{4} & \text{при } \hat{O} = \gamma_5 \gamma_\mu \text{ (псевдовектор).} \end{cases}$$

Напомним, что для простоты рассмотрения, как и в работе [26], мы считаем, что квазипотенциал имеет биспинорную структуру вида  $I \otimes I$ , а вершинная функция также имеет заданную спинорную структуру, пропорциональную матрице  $\hat{O}$ , не зависящую от импульсных переменных, причем  $\text{Sp} \hat{O}^2 \neq 0$ , а в качестве  $\hat{O}$ , выбираются матрицы Дирака  $\gamma_5, \gamma_\mu, \gamma_5 \gamma_\mu$  ( $\mu = 0, 1, 2, 3$ ). Такой выбор матрицы  $\hat{O}$ , позволил найти точные решения РКП-уравнения (1) [23].

Используя разложение волновой РКП-функции  $\Psi_{M_Q}(\mathbf{r})$  по функциям Лежандра первого рода  $P_\mu^{\nu}(z)$ ,

$$\Psi_{M_Q}(\mathbf{r}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) i^\ell \frac{\Phi_\ell(r; \chi)}{r} P_\ell \left( \frac{\Delta_{q, m\lambda_Q} \cdot \mathbf{r}}{|\Delta_{q, m\lambda_Q}| r} \right), \quad (4)$$

получим уравнение для радиальной волновой функции с относительным орбитальным моментом  $\ell^2$

$$\left(\hat{H}_{0,\ell}^{\text{rad}} - \text{ch}\chi\right)\varphi_\ell(r, \chi) = -V(r)\hat{A}\left(\hat{H}_{0,\ell}^{\text{rad}}\right)\varphi_\ell(r, \chi). \quad (5)$$

Здесь оператор  $\hat{A}$  по-прежнему определен в (3), радиальная часть оператора свободного гамильтониана (2) дается выражением

$$\hat{H}_{0,\ell}^{\text{rad}} = \text{ch}\left(i\lambda\frac{d}{dr}\right) + \frac{\lambda^2\ell(\ell+1)}{2r(r+i\lambda)}\exp\left(i\lambda\frac{d}{dr}\right), \quad (6)$$

а  $\chi$  – быстрота, которая параметризует импульс и энергию:

$$\Delta_{q,m\lambda_Q} = m\text{sh}\chi\mathbf{n}_{\Delta_{q,m\lambda_Q}}, \quad |\mathbf{n}_{\Delta_{q,m\lambda_Q}}| = 1,$$

$$M_Q = 2\Delta_{q,m\lambda_Q}^0, \quad \Delta_{q,m\lambda_Q}^0 = m\text{ch}\chi,$$

где  $\Delta_{q,m\lambda_Q}^0$ ,  $\Delta_{q,m\lambda_Q}$  – временная и пространственная компоненты 4-вектора  $\Delta_{q,m\lambda_Q} = \Lambda_{\lambda_Q}^{-1}q$  из пространства Лобачевского с 4-вектором скорости составной частицы  $\lambda_Q = (\lambda_Q^0; \lambda_Q) = Q/\sqrt{Q^2}$ :

$$\begin{aligned} \Lambda_{\lambda_Q}^{-1}q &= \Delta_{q,m\lambda_Q} = \mathbf{q}(-)m\lambda_Q = \\ &= \mathbf{q} - \lambda_Q\left(q_0 - \frac{\mathbf{q}\cdot\lambda_Q}{1+\lambda_Q^0}\right), \end{aligned} \quad (7)$$

$$(\Lambda_{\lambda_Q}^{-1}q)^0 = \Delta_{q,m\lambda_Q}^0 = q_0\lambda_Q^0 - \mathbf{q}\cdot\lambda_Q = \sqrt{m^2 + \Delta_{q,m\lambda_Q}^2},$$

причем все 4-импульсы принадлежат верхней полé массового гиперboloида

$$\Delta_{q,m\lambda_Q}^2 = \Delta_{q,m\lambda_Q}^{02} - \Delta_{q,m\lambda_Q}^2 = m^2.$$

### 3. РЕЛЯТИВИСТСКИЙ ФОРМФАКТОР ДВУХЧАСТИЧНОЙ СИСТЕМЫ

Формфактор двухчастичной системы определен в соответствии с работами [17], основанными на работах [6–10], как матричный элемент локального оператора тока между связанными состояниями с 4-импульсами  $Q, P$  через квазипотенциальные волновые функции, удовлетворяющие уравнению Кадышевского. Тогда, следуя работам [17, 18],

<sup>2</sup>Аналогичное уравнение для случая двух спиновых кварков равных масс было получено в [26] при ином определении волновой функции и квазипотенциала.

<sup>3</sup>Напомним, что обозначение  $\mathbf{q}(-)m\lambda_Q$  мы используем здесь и далее для операции сдвига в пространстве Лобачевского как пространства постоянной кривизны (см., например, работы [15, 22]).

матричному элементу локального оператора тока в импульсном приближении вблизи полюсов связанных состояний с 4-импульсами  $Q, P$  двух релятивистских спиновых частиц равных масс может быть сопоставлено инвариантное выражение

$$\langle P | \mathcal{J} | Q \rangle = -\frac{z_1}{(2\pi)^3} \times \quad (8)$$

$$\begin{aligned} &\times \int d\tau_P d\tau_Q d^{(4)}k'_1 d^{(4)}k_1 d^{(4)}k_2 \Gamma_P^{\alpha\beta+}(k_1, k_2; \lambda_P \tau_P) \times \\ &\times S_\gamma^{(+)\alpha}(k_1, m) \frac{1}{(\tau_P + i\epsilon)(\tau_Q - i\epsilon)} \times \\ &\times S_\delta^{(+)\gamma}(k'_1, m) \Gamma_Q^{\delta\kappa}(k'_1, k_2; \lambda_Q \tau_Q) S_\kappa^{(+)\beta}(k_2, -m) \times \\ &\times \delta^{(4)}(-Q + k'_1 + k_2 - \lambda_Q \tau_Q) \times \\ &\times \delta^{(4)}(P - k_1 - k_2 + \lambda_P \tau_P) + (1 \leftrightarrow 2). \end{aligned}$$

Здесь  $\Gamma_Q^{\delta\kappa}(k'_1, k_2; \lambda_Q \tau_Q)$ ,  $\Gamma_P^{\alpha\beta}(k_1, k_2; \lambda_P \tau_P)$  – вершинные функции, которые для простоты рассмотрения, как и при выводе уравнения (1) [23], имеют заданную спиновую структуру, пропорциональную матрице  $\hat{O}$ , т.е.

$$\begin{aligned} \Gamma_Q^{\delta\kappa}(k'_1, k_2; \lambda_Q \tau_Q) &= \hat{O}^{\delta\kappa} \Gamma_Q(k'_1, k_2; \lambda_Q \tau_Q), \\ \Gamma_P^{\alpha\beta}(k_1, k_2; \lambda_P \tau_P) &= \hat{O}^{\alpha\beta} \Gamma_P(k_1, k_2; \lambda_P \tau_P), \end{aligned} \quad (9)$$

причем матрица  $\hat{O}$  не зависит от импульсных переменных и в качестве  $\hat{O}$  выбираются матрицы Дирака  $\gamma_5, \gamma_\mu, \gamma_5 \gamma_\mu$  ( $\mu = 0, 1, 2, 3$ ), а  $\alpha, \beta, \dots, \kappa$  – биспинорные индексы, пробегающие значения 0, 1, 2, 3;  $S^{(+)}(k_i, m) = \theta(k_{i0})(\hat{k}_i + m)\delta(k_i^2 - m^2)$ , где  $\hat{k}_i = k_i^\mu \gamma_\mu$  – положительно-частотные части спинорных функций Грина  $i$ -й составляющей с массой  $m_1 = m_2 = m$ , которая переносит 4-импульс  $k_i(p_i, q_i, i = 1, 2)$ , причем все 4-импульсы принадлежат верхней полé массового гиперboloида:

$$k_i^2 = k_{i0}^2 - \mathbf{k}_i^2 = m^2, \quad i = 1, 2. \quad (10)$$

Этому выражению отвечает диаграмма на рисунке. Сплошные линии отвечают ее составляющим, которые переносят 4-импульсы  $k'_1, k_i, i = 1, 2$ , а штриховые линии – квазичастицам-шпурионам. В качестве векторов 4-скорости составной частицы выбрали векторы  $\lambda_Q = (\lambda_Q^0; \lambda_Q) = Q/\sqrt{Q^2} = Q/M_Q$ ,  $M_Q^2 = s_q = Q^2 = (q_1 + q_2)^2$  и  $\lambda_P = (\lambda_P^0; \lambda_P) = P/\sqrt{P^2} = P/M_P$ ,

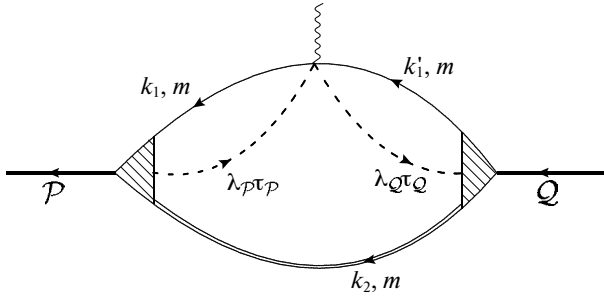


Диаграмма для матричного элемента оператора тока между связанными состояниями с 4-импульсами  $Q, P$  для случая двух релятивистских спиновых частиц равных масс.

$M_P^2 = s_P = P^2 = (p_1 + p_2)^2$ . Здесь следует подчеркнуть, что из-за перехода к различным собственным временам системы до ( $\tau_Q$ ) и после взаимодействия ( $\tau_P$ ) диаграмма на рисунке отличается от диаграмм, которые возникают в подходе Кадышевского для  $S$ -матрицы. Также различны и векторы 4-скорости составной частицы до,  $\lambda_Q$ , и после взаимодействия,  $\lambda_P$ .

В данном подходе скалярные части вершинных функций  $\Gamma_Q(k'_1, k_2; \lambda_Q \tau_Q)$  и  $\Gamma_P(k_1, k_2; \lambda_P \tau_P)$  представляют собой четырехвостки, у которых два внешних импульса коллинеарны в силу выбора векторов 4-скорости составной частицы  $\lambda_Q$  и  $\lambda_P$ . Значит, для связанной системы спиновых частиц, которые находятся в состоянии движения с относительным орбитальным моментом  $\mathcal{J}$ , скалярные части вершинных функций  $\Gamma_Q(k'_1, k_2; \lambda_Q \tau_Q)$  и  $\Gamma_P(k_1, k_2; \lambda_P \tau_P)$  могут зависеть только от лоренцевых скаляров:

$$\begin{aligned} Q^2 &= M_Q^2, \quad k_1'^2 = m^2, \quad Qk_1' = M_Q(\lambda_Q k_1'), \\ Qk_2 &= M_Q(\lambda_Q k_2), \quad k_1' k_2, \quad (\lambda_Q \tau_Q)^2 = \tau_Q^2, \quad \lambda_Q Q; \\ P^2 &= M_P^2, \quad k_i^2 = m^2, \quad Pk_i = M_P(\lambda_P k_i), \\ i &= 1, 2, \quad k_1 k_2, \quad (\lambda_P \tau_P)^2 = \tau_P^2, \quad \lambda_P P. \end{aligned}$$

Теперь учтем, что все импульсы частиц лежат на массовом гиперboloиде (10), а  $\lambda_Q Q = M_Q$  и  $\lambda_P P = M_P$ . Следовательно, только восемь параметров являются существенными:  $k_1 k_2, k_1' k_2, \tau_Q, \tau_P, Qk_1', Qk_2, Pk_i, i = 1, 2$ . Кроме того, используя коллинеарность  $\lambda_Q \uparrow\uparrow Q$  и  $\lambda_P \uparrow\uparrow P$  и законы сохранения  $-Q + k_1' + k_2 - \lambda_Q \tau_Q = 0$  и  $P - k_1 - k_2 + \lambda_P \tau_P = 0$ , находим шесть соотношений, связывающих эти восемь параметров:

$$\begin{aligned} M_Q + \tau_Q &= \sqrt{2m^2 + 2k_1' k_2}, \\ Qk_1' &= \frac{M_Q(m^2 + k_1' k_2)}{M_Q + \tau_Q}, \\ Qk_2 &= \frac{M_Q(m^2 + k_1' k_2)}{M_Q + \tau_Q}, \\ M_P + \tau_P &= \sqrt{2m^2 + 2k_1 k_2}, \\ Pk_1 &= \frac{M_P(m^2 + k_1 k_2)}{M_P + \tau_P}, \\ Pk_2 &= \frac{M_P(m^2 + k_1 k_2)}{M_P + \tau_P}. \end{aligned}$$

Таким образом, скалярные части вершинных функций  $\Gamma_Q(k'_1, k_2; \lambda_Q \tau_Q)$  и  $\Gamma_P(k_1, k_2; \lambda_P \tau_P)$  при  $\lambda_Q \uparrow\uparrow Q$  и  $\lambda_P \uparrow\uparrow P$  зависят каждая только от одного скалярного лоренц-инвариантного параметра, в качестве которого выберем  $Qk_2$  и  $Pk_2$ , и введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \Gamma_Q(k'_1, k_2; \lambda_Q \tau_Q) &= \Gamma_{M_Q}(Qk_2), \\ \Gamma_P(k_1, k_2; \lambda_P \tau_P) &= \Gamma_{M_P}(Pk_2). \end{aligned} \quad (11)$$

Принимая во внимание установленную зависимость скалярной части каждой из вершинных функций только от одного скалярного лоренц-инвариантного параметра  $Qk_2$  и  $Pk_2$ , представление (9) и выбор векторов 4-скорости  $\lambda_Q$  и  $\lambda_P$ , а также учитывая, что

$$\begin{aligned} d^{(4)}k_i \theta(k_{i0}) \delta(k_i^2 - m^2) &= \\ &= d\mathbf{k}_i dk_{i0} \frac{\delta\left(k_{i0} - \sqrt{m^2 + \mathbf{k}_i^2}\right)}{2k_{i0}}, \\ k_{i0} &= \sqrt{m^2 + \mathbf{k}_i^2}, \quad i = 1, 2, \end{aligned}$$

выполним в (8) интегрирования по  $k'_{i0}, k_{i0}, i = 1, 2$ , подобно тому как выполнялись интегрирования в работах [19, 20]. В результате выражение для тока (8) принимает вид

$$\begin{aligned} \langle P | \mathcal{J} | Q \rangle &= \\ &= -\frac{z_1}{(4\pi)^3} \int d\tau_P d\tau_Q d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_1' d\mathbf{k}_2 \frac{\Gamma_{M_P}^*(Pk_2)}{\sqrt{m^2 + \mathbf{k}_2^2} \sqrt{m^2 + \mathbf{k}_1'^2} (\tau_P + i\epsilon)} \times \\ &\times \text{Sp}[\hat{O}^+(\hat{k}_1 + m)(\hat{k}_1' + m)\hat{O}(\hat{k}_2 - m)] \times \\ &\times \frac{\Gamma_{M_Q}(Qk_2)}{\sqrt{m^2 + \mathbf{k}_1'^2} (\tau_Q - i\epsilon)} \end{aligned} \quad (12)$$

$$\times \delta^{(4)}(-Q + k'_1 + k_2 - \lambda_Q \tau_Q) \times \\ \times \delta^{(4)}(P - k_1 - k_2 + \lambda_P \tau_P) + (1 \leftrightarrow 2).$$

Для того чтобы в (12) проинтегрировать по  $\mathbf{k}'_1, \mathbf{k}_1, \tau_Q, \tau_P$ , в интегралах по  $\mathbf{k}'_1$  и  $\mathbf{k}_1$  выполним чистые преобразования Лоренца (7)  $L = \Lambda_{\lambda_Q}^{-1}$  и  $L = \Lambda_{\lambda_P}^{-1}$  соответственно:  $\Lambda_{\lambda_Q}^{-1} Q = (M_Q; \mathbf{0})$ ,  $\Lambda_{\lambda_P}^{-1} P = (M_P; \mathbf{0})$ , и учтем, что  $Qk_2$  и  $Pk_2$  являются лоренцевыми скалярами:  $Qk_2 = \Lambda_{\lambda_Q}^{-1}(Qk_2) = (\Lambda_{\lambda_Q}^{-1} Q)(\Lambda_{\lambda_Q}^{-1} k_2) = M_Q \Delta_{k_2, m\lambda_Q}^0$ ,  $Pk_2 = M_P \Delta_{k_2, m\lambda_P}^0$ , а меры интегрирования  $d\Omega_{\mathbf{k}_i} = m d\mathbf{k}_i / \Delta_{k_i, m\lambda_Q}^0$ ,  $i = 1, 2$ ,  $\delta$ -функции в (12) и полная энергия  $\sqrt{s_k} = \Lambda_{\lambda_{Q(P)}}^{-1} \sqrt{s_k} = 2 \sqrt{m^2 + \Delta_{k, m\lambda_{Q(P)}}^2} = \sqrt{s_{\Delta_{k, m\lambda_{Q(P)}}}}$  на массовом гиперboloиде (10) инвариантны при преобразованиях Лоренца  $\Lambda_{\lambda_{Q(P)}}^{-1}$ . Тогда выражение для упругого тока (12) запишется в виде ( $M_Q = M_P = M$ )

$$\langle \mathcal{P} | \mathcal{J} | \mathcal{Q} \rangle = \frac{z_1 + z_2}{(2\pi)^3} \times \quad (13)$$

$$\times \int d\Omega_{\Delta_{k, m\lambda_Q}} \Psi_M^*(\Delta_{k, m\lambda_P}) \times \\ \times \hat{B}(\Delta_{k, m\lambda_P}^0, \Delta_{k, m\lambda_Q}^0) \Psi_M(\Delta_{k, m\lambda_Q}),$$

где волновая РКП-функция в пространстве моментов связана со скалярной частью вершинной функции в (11) соотношением

$$\Psi_{M_Q}(\Delta_{k, m\lambda_Q}) = \\ = \frac{\Gamma_{M_Q}(\Delta_{k, m\lambda_Q})}{2^{3/2} \sqrt{m} \Delta_{k, m\lambda_Q}^0 \left( M_Q - 2\Delta_{k, m\lambda_Q}^0 + i\epsilon \right)},$$

а фактор  $\hat{B}(\Delta_{k, m\lambda_P}^0, \Delta_{k, m\lambda_Q}^0)$  дается выражением

$$\hat{B}(\Delta_{k, m\lambda_P}^0, \Delta_{k, m\lambda_Q}^0) = \quad (14) \\ = -4m \left[ \tilde{b} \left( \Delta_{k, m\lambda_P}^0 + \Delta_{k, m\lambda_Q}^0 \right)^2 + \frac{\tilde{a} - \tilde{b}}{2} m^2 \right], \\ \tilde{a} = \begin{cases} 1 & \text{при } \hat{O} = \gamma_5 \text{ (псевдоскаляр);} \\ 4 & \text{при } \hat{O} = \gamma_\mu \text{ (вектор);} \\ -4 & \text{при } \hat{O} = \gamma_5 \gamma_\mu \text{ (псевдовектор);} \end{cases}$$

$$\tilde{b} = \begin{cases} 1 & \text{при } \hat{O} = \gamma_5 \text{ (псевдоскаляр);} \\ 2 & \text{при } \hat{O} = \gamma_\mu \text{ (вектор);} \\ 2 & \text{при } \hat{O} = \gamma_5 \gamma_\mu \text{ (псевдовектор).} \end{cases}$$

Фактор (14) получается при применении преобразований Лоренца  $\Lambda_{\lambda_{Q,P}}^{-1}$  (7) к шпuru в (12), который после вычисления с матрицами  $\hat{O} = \gamma_5, \gamma_\mu$  и  $\gamma_5 \gamma_\mu$  имеет вид

$$\text{Sp} \left[ \hat{O}^+ (\hat{k}_1 + m)(\hat{k}'_1 + m) \hat{O} (\hat{k}_2 - m) \right] = \\ = -4m (\tilde{a} k_1 k'_1 + \tilde{b} k'_1 k_2 + \tilde{b} k_1 k_2 + \tilde{a} m^2).$$

Заметим, что вектор  $\Delta_{k, m\lambda_P}$  из пространства Лобачевского, реализующегося на верхней полe массового гиперboloида (10), может быть представлен в виде

$$\Delta_{k, m\lambda_P} = \Lambda_{\lambda_P}^{-1} \mathbf{k} = \Lambda_{\lambda_P}^{-1} \Lambda_{\lambda_Q} \Delta_{k, m\lambda_Q} = \\ = \left[ \Lambda_{\lambda_P}^{-1} \Lambda_{\lambda_Q} \Lambda_{\Delta_{P,Q}} \right] \left[ \Lambda_{\Delta_{P,Q}}^{-1} \Delta_{k, m\lambda_Q} \right] = \\ = V(\Lambda_{\lambda_Q}; \mathcal{P}) \Delta_{k, m\lambda_Q} (-) \frac{m}{M} \Delta_{P,Q}.$$

Здесь  $\Delta_{P,Q} = \Lambda_{\lambda_Q}^{-1} P - 4$ -вектор передачи импульса в пространстве Лобачевского:

$$\Delta_{P,Q} = \Lambda_Q^{-1} P = \mathcal{P}(-) Q = \quad (15) \\ = \mathcal{P} - \frac{Q}{M} \left( P_0 - \frac{P \cdot Q}{Q_0 + M} \right) = M \text{sh} \chi_{\Delta} \mathbf{n}_{\Delta},$$

$$\Delta_{P,Q}^0 = \left( \Lambda_Q^{-1} P \right)^0 = \frac{P_0 Q_0 - P \cdot Q}{M} = \frac{PQ}{M} = M \text{ch} \chi_{\Delta},$$

$$P = M \text{sh} \chi_P \mathbf{n}_P, \quad Q = M \text{sh} \chi_Q \mathbf{n}_Q, \quad P_0 = M \text{ch} \chi_P,$$

$$Q_0 = M \text{ch} \chi_Q, \quad |\mathbf{n}_P| = |\mathbf{n}_Q| = |\mathbf{n}_{\Delta}| = 1, \\ \Delta_{P,Q}^0{}^2 - \Delta_{P,Q}^2 = M^2,$$

где  $\chi_{\Delta}, \chi_P, \chi_Q$  — соответствующие быстроты, а  $V(\Lambda_{\lambda_Q}, \mathcal{P}) = \Lambda_{\lambda_P}^{-1} \Lambda_{\lambda_Q} \Lambda_{\Delta_{P,Q}}$  — матрица вигнеровского вращения. При этом квадрат переданного 4-импульса  $t = (P - Q)^2 = -Q^2$  связан с вектором передачи импульса  $\Delta_{P,Q}$  соотношением

$$Q^2 = -t = -2M^2 + 2M \sqrt{M^2 + \Delta_{P,Q}^2} = \quad (16) \\ = 2M^2 (\text{ch} \chi_{\Delta} - 1).$$

Таким образом, в рассматриваемом скалярном случае упругий формфактор  $F(t)$  определим, полагая

$$F(t) = \frac{1}{2m^3} \langle \mathcal{P} | \mathcal{J} | \mathcal{Q} \rangle. \quad (17)$$

Значит, упругий скалярный формфактор  $F(t)$  можно рассматривать как функцию инвариантной переменной  $\Delta_{\mathcal{P},\mathcal{Q}}^2$  – квадрата вектора передачи импульса в пространстве Лобачевского. Тогда, принимая во внимание соотношения (13)–(17), выражение для упругого формфактора будет представлять собой свертку волновых функций в этом пространстве. Следовательно, используя преобразования Шапиро<sup>4)</sup>

$$\begin{aligned} \Psi_{M_{\mathcal{Q}}}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\Omega_{\Delta_{p,m\lambda_{\mathcal{Q}}}} \xi(\Delta_{p,m\lambda_{\mathcal{Q}}}, \mathbf{r}) \Psi_{M_{\mathcal{Q}}}(\Delta_{p,m\lambda_{\mathcal{Q}}}), \\ \Psi_{M_{\mathcal{Q}}}(\Delta_{p,m\lambda_{\mathcal{Q}}}) &= \int d\mathbf{r} \xi^*(\Delta_{p,m\lambda_{\mathcal{Q}}}, \mathbf{r}) \Psi_{M_{\mathcal{Q}}}(\mathbf{r}), \end{aligned}$$

условие полноты

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int d\Omega_{\Delta_{p,m\lambda_{\mathcal{Q}}}} \xi(\Delta_{p,m\lambda_{\mathcal{Q}}}, \mathbf{r}) \xi^*(\Delta_{p,m\lambda_{\mathcal{Q}}}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}),$$

уравнение в терминах конечных разностей

$$\left( 2\Delta_{p,m\lambda_{\mathcal{Q}}}^0 - \hat{H}_0 \right) \xi(\Delta_{p,m\lambda_{\mathcal{Q}}}, \mathbf{r}) = 0, \quad (18)$$

эрмитовость оператора свободного гамильтониана (2) и теорему сложения для релятивистских плоских волн

$$\begin{aligned} \int d\omega_n \xi \left( \Delta_{k,m\lambda_{\mathcal{Q}}}(-) \frac{m}{M_{\mathcal{Q}}} \Delta_{\mathcal{P},\mathcal{Q}}, \mathbf{r} \right) &= \quad (19) \\ &= \int d\omega_n \xi(\Delta_{k,m\lambda_{\mathcal{Q}}}, \mathbf{r}) \xi^* \left( \frac{m}{M_{\mathcal{Q}}} \Delta_{\mathcal{P},\mathcal{Q}}, \mathbf{r} \right), \end{aligned}$$

формфактор (13) выразится в виде релятивистского фурье-образа от ковариантных волновых РКП-функций в конфигурационном представлении<sup>5)</sup>:

$$\begin{aligned} F(t) &= (z_1 + z_2) \times \quad (20) \\ &\times \int d\mathbf{r} \xi^* \left( \frac{m}{M} \Delta_{\mathcal{P},\mathcal{Q}}, \mathbf{r} \right) \left\{ \tilde{b} \left\| \frac{\hat{H}_0}{m} \Psi_M(\mathbf{r}) \right\|^2 + \right. \end{aligned}$$

<sup>4)</sup> Функции  $\xi(\Delta_{p,m\lambda_{\mathcal{Q}}}, \mathbf{r}) = \left( \frac{\Delta_{p,m\lambda_{\mathcal{Q}}}^0 - \Delta_{p,m\lambda_{\mathcal{Q}}} \cdot \mathbf{n}}{m} \right)^{-1-ir/\lambda}$  вы-

полняют роль плоских волн в пространстве Лобачевского. Эти функции соответствуют главной серии унитарных неприводимых представлений группы Лоренца и в нерелятивистском пределе

$(|\Delta_{p,m\lambda_{\mathcal{Q}}}| \ll 1/\lambda, r \gg \lambda) \xi(\Delta_{p,m\lambda_{\mathcal{Q}}}, \mathbf{r}) \rightarrow \exp(i\Delta_{p,m\lambda_{\mathcal{Q}}} \cdot \mathbf{r})$ .

<sup>5)</sup> Выражение (20) при  $\tilde{a} = 1, \tilde{b} = 0$  совпадает с аналогичным выражением в [19], полученным для случая двух бесспиновых частиц произвольных масс, взятым при  $m_1 = m_2 = m$ .

$$\left. + \operatorname{Re} \left[ \Psi_M^*(\mathbf{r}) \frac{\hat{H}_0^2}{m^2} \Psi_M(\mathbf{r}) \right] + (\tilde{a} - \tilde{b}) |\Psi_M(\mathbf{r})|^2 \right\},$$

где возможность применимости теоремы сложения (19) следует из независимости волновой РКП-функции  $\Psi_M(\mathbf{r})$  от направления вектора  $\mathbf{r}$ .

Для случая  $s$ -состояния ( $\ell = 0$ ) составной системы из выражения (20) после интегрирования по угловым переменным получим

$$\begin{aligned} F_{\ell=0}(t) &= 4\pi(z_1 + z_2) \frac{\chi_{\Delta}}{\operatorname{sh} \chi_{\Delta}} \times \quad (21) \\ &\times \int_0^{\infty} dr r \frac{\sin(rm\chi_{\Delta})}{m\chi_{\Delta}} \left\{ \tilde{b} \left\| \frac{\hat{H}_{0,\ell=0}}{m} \frac{\Phi_0(r,\chi)}{r} \right\|^2 + \right. \\ &+ \operatorname{Re} \left[ \frac{\Phi_0^*(r,\chi)}{r} \frac{\hat{H}_{0,\ell=0}^2}{m^2} \frac{\Phi_0(r,\chi)}{r} \right] + (\tilde{a} - \tilde{b}) \left| \frac{\Phi_0(r,\chi)}{r} \right|^2 \left. \right\}, \end{aligned}$$

где использовали разложение (4) для волновой функции  $\Psi_M(\mathbf{r})$  и разложение для релятивистских плоских волн  $\xi(\mathbf{p}, \mathbf{r})$ ,

$$\xi(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) i^{\ell} p_{\ell}(r, \operatorname{ch} \chi_p) P_{\ell} \left( \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{pr} \right),$$

причем

$$\begin{aligned} \xi^* \left( \frac{m}{M} \Delta_{\mathcal{P},\mathcal{Q}}, \mathbf{r} \right) \Big|_{\ell=0} &= \left( \frac{\frac{m}{M} \Delta_{\mathcal{P},\mathcal{Q}}^0 - \frac{m}{M} \Delta_{\mathcal{P},\mathcal{Q}} \cdot \mathbf{n}}{m} \right)^{-1+im} = \\ &= p_0(rm, \operatorname{ch} \chi_{\Delta}) = \frac{\sin(rm\chi_{\Delta})}{rm \operatorname{sh} \chi_{\Delta}}. \end{aligned}$$

Здесь функция

$$\begin{aligned} p_{\ell}(\rho, \operatorname{ch} \chi_p) &= \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2 \operatorname{sh} \chi_p}} \frac{(-1)^{\ell+1}}{\rho} (-\rho)^{(\ell+1)} P_{-1/2+i\rho}^{-1/2-\ell}(\operatorname{ch} \chi_p), \quad \rho = rm, \end{aligned}$$

является решением уравнения (18), где  $(-\rho)^{(l+1)} = i^{l+1} \Gamma(l+1+i\rho)/\Gamma(i\rho)$  называется обобщенной степенью [22], а  $\Gamma(z)$  есть гамма-функция; быстрота  $\chi_{\Delta}$  связана с квадратом вектора передачи импульса  $\Delta_{\mathcal{P},\mathcal{Q}}^2$  и квадратом переданного 4-импульса  $t = -Q^2$  в пространстве Лобачевского соотношениями (15) и (16), а быстрота  $\chi_n$  соответствует уровню  $n$  связанного состояния с энергией  $M = M_n = 2m \operatorname{ch} \chi_n$ .

#### 4. СРЕДНЕКВАДРАТИЧЕСКИЙ РАДИУС И ФОРМФАКТОР ДЛЯ КУЛОНОВСКОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Рассмотрим выражение для инвариантного среднеквадратического радиуса составной системы, которое в терминах волновой функции  $s$ -состояния согласно (21) дается соотношением [12]

$$\langle r_0^2 \rangle = \frac{6 \partial F_{\ell=0}(t) / \partial t |_{t=0}}{F_{\ell=0}(0)} = \quad (22)$$

$$= \frac{1}{M^2} + \frac{1}{M^2} \frac{\int_0^\infty d\rho \rho^2 R(\rho)}{\int_0^\infty d\rho R(\rho)},$$

$$R(\rho) = 4\tilde{b} \left| \hat{H}_{0,\ell=0}^{\text{rad}} \varphi_0(\rho, \chi) \right|^2 + \quad (23)$$

$$+ \text{Re} \left\{ \varphi_0^*(\rho, \chi) \left( \hat{H}_{0,\ell=0}^{\text{rad}} \right)^2 \varphi_0(\rho, \chi) \right\} + (\tilde{a} - \tilde{b}) |\varphi_0(\rho, \chi)|^2,$$

где  $\hat{H}_{0,\ell=0}^{\text{rad}}$  – радиальная часть оператора свободного гамильтониана (2), которая определена в (6).

Таким образом, если для  $s$ -состояния функция  $R(\rho)$  является знакопостоянной, то она описывает не всю структуру составной частицы, а только область, лежащую на расстояниях, больших ее комптоновской длины волны  $1/M$ . При этом центральной сфере с  $\langle r_0^2 \rangle = 1/M^2$  отвечает функция пространственного распределения вида  $R(\rho) = \delta(\rho)/4\pi$ , которая в соответствии с (21) приводит к величине вклада в формфактор от этой сферы, равного

$$F_{\ell=0}(Q^2) |_{r_0=1/M} = (z_1 + z_2) \frac{\chi_\Delta}{\text{sh } \chi_\Delta}.$$

Если же функция  $R(\rho)$  в (23) не является знакопостоянной, то ей будут отвечать отрицательные значения

$$\langle r^2 \rangle = \frac{1}{M^2} \frac{\int_0^\infty d\rho \rho^2 R(\rho)}{\int_0^\infty d\rho R(\rho)}.$$

Поэтому вклад отрицательных  $\langle r^2 \rangle$  приводит, как это видно из (22), к уменьшению величины среднеквадратического радиуса  $\langle r_0^2 \rangle$  мезона по сравнению с его комптоновской длиной волны  $1/M$ . Этот результат согласуется с экспериментальным значением для  $\pi$ -мезона.

Из выражений (3), (22) и (23) следует, что для случая  $\hat{O} = \gamma_5$  (псевдоскаляр) вклады в форм-

фактор и в среднеквадратический радиус определяются первым и вторым слагаемыми в (23); в случаях  $\hat{O} = \gamma_\mu, \gamma_5 \gamma_\mu$  (вектор и псевдовектор) вклады в формфактор и в среднеквадратический радиус дают все три слагаемых в (23).

В качестве примера рассмотрим формфактор и среднеквадратический радиус составной системы в случае кулоновского поля притяжения

$$V(r) = -\frac{\alpha_S}{r}, \quad \alpha_S > 0, \quad (24)$$

пропатору которого в РКП-подходе в конфигурационном представлении отвечает на расстояниях  $r > 1/m$  потенциал (24). В импульсном пространстве потенциалу (24) соответствует выражение

$$\tilde{V}(\chi_\Delta) \sim \frac{1}{\chi_\Delta \text{sh } \chi_\Delta}.$$

При больших  $Q^2$  согласно выражению (16)  $\chi_\Delta \approx \ln(Q^2/M^2)$  и, следовательно, потенциал  $\tilde{V}(\chi_\Delta)$  ведет себя как  $[(Q/M)^2 \ln(Q/M)^2]^{-1}$ , что воспроизводит главное поведение потенциала в КХД, который в лидирующем порядке пропорционален  $\bar{\alpha}_S(Q^2)/Q^2$ , где  $\bar{\alpha}_S(Q^2)$  – инвариантный заряд. Такое КХД-подобное поведение потенциала (24) в РКП-подходе впервые было отмечено в работе [27].

Радиальная волновая функция точного решения РКП-уравнения (5) с кулоновским потенциалом (24) для основного уровня  $n = 1$   $s$ -состояния ( $\ell = 0$ ) составной системы с энергией  $M_1$  имеет вид [23]

$$\varphi_0^{(1)}(\rho, \kappa_1) = C_0^{(1)}(\kappa_1) (\rho - \rho_{\kappa_1}) e^{(\rho - \rho_{\kappa_1}) \kappa_1}, \quad (25)$$

где

$$\rho_{\kappa_1} = \frac{\tilde{\alpha}_S a}{2} \cos \kappa_1, \quad M_1 = 2m \cos \kappa_1,$$

$$0 < \kappa_1 < \pi/2, \quad \tilde{\alpha}_S = m\alpha_S,$$

параметры  $a, b$  определены в (3), нормировочный множитель находится из условия нормировки

$$4\pi \int_0^\infty dr |\varphi_0^{(1)}(r, \kappa_1)|^2 = 1, \quad (26)$$

а быстрая  $\kappa_1$  определяется из условия квантования

$$\tilde{\alpha}_S (a \cos^2 \kappa_1 + b) = 4 \sin \kappa_1. \quad (27)$$

Из (25) и (26) находим:

$$\left| C_0^{(1)}(\kappa_1) \right|^2 = \frac{m \kappa_1^3 e^{-2\kappa_1 \rho_{\kappa_1}}}{\pi (2\kappa_1^2 \rho_{\kappa_1}^2 - 2\kappa_1 \rho_{\kappa_1} + 1)}.$$

Тогда формфактор (21) и среднеквадратический радиус (22) составной системы с кулоновским потенциалом (24) для основного уровня  $s$ -состояния с энергией  $M_1$  можно представить в виде

$$\langle r_0^2 \rangle = \frac{1}{M^2} + \frac{1}{2\kappa_1^2 M^2} \left[ 1 + \frac{5\tilde{A} + 2\kappa_1\tilde{B}}{\tilde{A} + \kappa_1\tilde{B} + 2\kappa_1^2\tilde{C}} \right], \quad (28)$$

$$F_{\ell=0, n=1}(Q^2) = \quad (29)$$

$$= \frac{4(z_1 + z_2)\kappa_1^3}{(2\kappa_1^2\rho_{\kappa_1}^2 - 2\kappa_1\rho_{\kappa_1} + 1)\text{sh}\chi_\Delta} \times \left\{ \frac{4\kappa_1\tilde{A}\chi_\Delta}{(\chi_\Delta^2 + 4\kappa_1^2)^2} + \frac{\tilde{B}\chi_\Delta}{\chi_\Delta^2 + 4\kappa_1^2} + \tilde{C} \left[ \frac{\pi}{2} - \arctg \frac{2\kappa_1}{\chi_\Delta} \right] \right\},$$

$$\tilde{A} = \tilde{a} - \tilde{b} + 8\tilde{b}\cos^2\kappa_1,$$

$$\tilde{B} = \tilde{\alpha}_S \cos\kappa_1 [4\tilde{b}(b - a\cos^2\kappa_1) - a(\tilde{a} - \tilde{b})],$$

$$\tilde{C} = 4\tilde{b}\sin^2\kappa_1 - \tilde{\alpha}_S^2 a \left( 2b\tilde{b} - \frac{a(\tilde{a} - \tilde{b})}{4} \right) \cos^2\kappa_1.$$

При больших  $Q^2$  быстрота  $\chi_\Delta \approx \ln(Q^2/M_1^2)$  и, следовательно, поведение формфактора (29) дается выражением

$$F_{\ell=0, n=1}(Q^2) \approx \frac{4\pi(z_1 + z_2)\kappa_1^3\tilde{C}}{2\kappa_1^2\rho_{\kappa_1}^2 - 2\kappa_1\rho_{\kappa_1} + 1} \frac{1}{(Q/M_1)^2} \times \left\{ 1 + O[\ln^{-1}(Q/M_1)^2] \right\}. \quad (30)$$

Такое поведение формфактора при больших  $t = -Q^2$  находится в полном согласии с убыванием формфактора  $\pi$ -мезона по закону  $F_\pi \sim |t|^{-1}$ , который предсказывается правилом размерного кваркового счета [28,29]. Напомним, что нерелятивистская модель, основанная на кулоновском потенциале (24), предсказывает убывание формфактора  $\pi$ -мезона по дипольному закону:  $F_\pi \sim |t|^{-2}$ . Также подчеркнем, что именно учет спина в (30) приводит к такому поведению формфактора при больших  $t$ . В бесспиновом же случае, т.е. при  $a = 0, b = 2, \tilde{a} = 1, \tilde{b} = 0$ , убывание формфактора (29) происходит по закону  $F_\pi \sim (|t| \ln^3|t|)^{-1}$  (см. также работу [19]).

Полученные здесь результаты применимы для вычисления скалярного среднеквадратического радиуса основного уровня  $s$ -состояния ( $n = 1, \ell = 0$ ) пионов  $\pi^\pm$  с энергией  $M_1 \equiv M_{\pi^\pm} = 0.140$  ГэВ [30], а в качестве его волновой функции выберем кулоновскую волновую функцию (25). Для пиона (псевдоскаляр, см. (3) и (14))  $a = 1, b = 0, \tilde{a} = \tilde{b} = 1$ , а условие квантования (27) принимает вид  $\tilde{\alpha}_S \cos\kappa_1 = 4 \text{tg}\kappa_1$ . Тогда выражение (28) запишется в виде

$$\langle r_0^2 \rangle_s^{\pi^\pm} = \frac{0.0389}{M_1^2} \times \quad (31)$$

$$\times \left\{ 1 + \frac{1}{2\kappa_1^2} \left[ 1 - \frac{4}{\kappa_1 \text{tg}\kappa_1 - 1} + \frac{1}{(\kappa_1 \text{tg}\kappa_1 - 1)^2} \right] \right\} \text{фм}^2,$$

вычисление которого с энергией пионов

$M_1 \equiv M_{\pi^\pm} = 0.140$  ГэВ и значениями быстроты  $\kappa_1 = \{1.102 \pm 0.003; 0.9432 \pm 0.0003\}$  воспроизводит известное значение величины скалярного среднеквадратического радиуса основного уровня  $s$ -состояния заряженных пионов:  $\langle r_0^2 \rangle_s^{\pi^\pm} = \{0.61 \pm 0.04\} \text{фм}^2$  [31, 32]. Для этих значений быстроты  $\kappa_1$  параметры модели (константа связи и масса кварка) имеют значения:  $\tilde{\alpha}_S = \{17.483 \pm 0.234; 9.39 \pm 0.01\}$ ,  $m = \{0.155 \pm 0.001; 0.1192 \pm 0.0001\}$  ГэВ. В заключение нашего рассмотрения обратим внимание, что выражение (31) имеет сингулярность при  $\kappa_1 \text{tg}\kappa_1 = 1$ , т.е. при  $\kappa_1 \approx 0.86034$ . При этом “критическом” значении быстроты формфактор (29) для псевдоскалярных мезонов обращается в нуль, а их константа связи и масса кварков принимают значения:  $\tilde{\alpha}_S = 7.129$ ,  $m = 0.107$  ГэВ.

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе найдено новое ковариантное выражение упругого скалярного формфактора связанной системы двух релятивистских спиновых частиц равных масс как функции инвариантной переменной  $\Delta_{p,Q}^2$  – квадрата вектора передачи импульса в пространстве Лобачевского. Для этой цели был использован РКП-подход, основанный на ковариантной гамильтоновой формулировке квантовой теории поля [13, 14], осуществленный с помощью перехода к трехмерному релятивистскому конфигурационному представлению для системы двух релятивистских спиновых частиц равных масс.

В рамках рассматриваемого РКП-подхода, развитого в [13, 14], для скалярного случая было получено инвариантное выражение матричного элемента локального оператора тока в импульсном приближении вблизи полюсов связанных состояний двух релятивистских спиновых частиц равных масс через квазипотенциальные волновые функции, удовлетворяющие уравнению Кадышевского для случая двух релятивистских спиновых частиц равных масс. Рассмотрены случаи псевдоскаляра, вектора и псевдовектора.

Показано, что выражение формфактора (13) представляет собой свертку волновых РКП-функций в пространстве моментов Лобачевского. Это

позволило представить его в виде релятивистского фурье-образа от ковариантных волновых РКП-функций в конфигурационном представлении (20).

Применение трехмерного релятивистского конфигурационного представления для системы двух релятивистских спиновых частиц равных масс позволило установить, что если для  $s$ -состояния функция  $R(\rho)$  является знакопостоянной, то она описывает не всю структуру составной частицы, а только область, лежащую на расстояниях, больших ее комптоновской длины волны  $1/M$ . Выполненный анализ показал, что основной вклад в структуру составной частицы от центральной сферы радиуса  $r_0 = 1/M$  пропорционален  $\chi_{\Delta}/\text{sh}\chi_{\Delta}$ . В нерелятивистском пределе этот релятивистский геометрический фактор стремится к 1.

На примере кулоновского поля притяжения получено выражение для формфактора системы двух релятивистских спиновых частиц равных масс (29). Установлено, что ковариантные волновые РКП-функции кулоновского поля притяжения при больших переданных импульсах  $t = -Q^2$  приводят к поведению формфактора, которое находится в полном согласии с предсказанием правила размерного кваркового счета – убыванием типа  $|t|^{-1}$  [28, 29], в то время как нерелятивистская модель, основанная на кулоновском потенциале, предсказывает убывание формфактора  $\pi$ -мезона по дипольному закону:  $F_{\pi} \sim |t|^{-2}$ . Проведено сравнение с формфактором в бесспиновом случае, в котором его убывание для кулоновского потенциала происходит по закону  $F_{\pi} \sim (|t| \ln^3 |t|)^{-1}$ . Таким образом, учет вклада спина в формфактор для кулоновского потенциала приводит к его поведению при больших  $t$ , который предсказывается правилом размерного кваркового счета.

Показано, что выбором параметров модели (константы связи  $\tilde{\alpha}_S = \{17.483 \pm 0.234; 9.39 \pm 0.01\}$  и массы кварков  $m = \{0.155 \pm 0.001; 0.1192 \pm 0.0001\}$  ГэВ) можно воспроизвести известное значение величины скалярного среднеквадратического радиуса основного уровня  $s$ -состояния пионов  $\pi^{\pm}$  с энергией  $M_{\pi^{\pm}} = 0.140$  ГэВ:  $\langle r_0^2 \rangle_s^{\pi^{\pm}} = \{0.61 \pm 0.04\}$  фм<sup>2</sup> [31, 32]. В качестве волновой функции пионов была выбрана кулоновская волновая функция [23]. Установлено, что имеется “критическое” значение быстроты  $\kappa_1 \simeq 0.86034$ , при котором формфактор псевдоскалярных мезонов обращается в нуль, а их константа связи и масса кварков принимают “критические” значения:  $\tilde{\alpha}_S = 7.129$ ,  $m = 0.107$  ГэВ.

Автору приятно выразить искреннюю благодарность О.П. Соловцовой, В.В. Андрееву, А.Е. Дорохову, Ю.А. Курочкину и И.С. Сацункевичу за проявленный интерес к работе, полезное обсуждение

полученных результатов и ценные замечания к ним. Работа выполнена при поддержке программы международного сотрудничества Республики Беларусь с ОИЯИ и Государственной программы научных исследований на 2016–2020 годы “Конвергенция-2020”, подпрограмма “Микромир, плазма и Вселенная”.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. J. G. Körner and M. Kuroda, Phys. Rev. D **16**, 2165 (1977).
2. S. Dubnička, Nuovo Cimento A **103**, 1417 (1990).
3. О. Д. Далькаров, Письма в ЖЭТФ **28**, 183 (1978) [JETP Lett. **28**, 170 (1970)].
4. О. Д. Далькаров and К. В. Протасов, Nucl. Phys. A **504**, 845 (1989); Mod. Phys. Lett. A **4**, 1203 (1989); О. Д. Далькаров, К. В. Протасов, Письма в ЖЭТФ **49**, 241 (1989) [JETP Lett. **49**, 273 (1989)].
5. О. Д. Далькаров, Р. А. Хакхулин, and А. Ю. Воронин, arXiv: 0906.0266v1 [nucl-th].
6. V. A. Matveev, R. M. Muradyan, and A. N. Tavkhelidze, Preprint No. E2-3498, JINR (Dubna, 1967); No. P2-3900, JINR (Dubna, 1968).
7. В. Р. Гарсеванишвили, А. Н. Квинихидзе, В. А. Матвеев, А. Н. Тавхелидзе, Р. Н. Фаустов, ТМФ **23**, 310 (1975) [Theor. Math. Phys. **23**, 533 (1975)].
8. А. Л. Хелашвили, Сообщение P2-8750, ОИЯИ (Дубна, 1976).
9. Р. Н. Фаустов, ТМФ **3**, 240 (1970) [Theor. Math. Phys. **3**, 478 (1970)].
10. R. N. Faustov, Ann. Phys. (N.Y.) **78**, 176 (1973).
11. A. A. Logunov and A. N. Tavkhelidze, Nuovo Cimento **29**, 380 (1963).
12. С. И. Биленькая, Н. Б. Скачков, И. Л. Соловцов, ЯФ **26**, 1051 (1977) [Sov. J. Nucl. Phys. **26**, 556 (1977)].
13. V. G. Kadyshevsky, Nucl. Phys. B **6**, 125 (1968).
14. В. Г. Кадышевский, ЖЭТФ **46**, 654, 872 (1964) [Sov. Phys. JETP **19**, 443, 597 (1964)]; Докл. АН СССР **160**, 573 (1965) [Sov. Phys. Dokl. **10**, 46 (1965)].
15. V. G. Kadyshevsky, R. M. Mir-Kasimov, and N. B. Skachkov, Nuovo Cimento A **55**, 233 (1968).
16. N. B. Skachkov and I. L. Solovtsov, Preprint No. E2-11678, JINR (Dubna, 1978); Н. Б. Скачков, И. Л. Соловцов, ТМФ **41**, 205 (1979) [Theor. Math. Phys. **41**, 977 (1979)].
17. N. B. Skachkov and I. L. Solovtsov, Preprint No. E2-11727, JINR (Dubna, 1978); Н. Б. Скачков, И. Л. Соловцов, ЯФ **30**, 1079 (1979) [Sov. J. Nucl. Phys. **30**, 562 (1979)].
18. Н. Б. Скачков, И. Л. Соловцов, ТМФ **43**, 330 (1980) [Theor. Math. Phys. **43**, 494 (1980)].
19. Ю. Д. Черниченко, ЯФ **77**, 251 (2014) [Phys. Atom. Nucl. **77**, 229 (2014)].

20. Ю. Д. Черниченко, ЯФ **78**, 226 (2015) [Phys. Atom. Nucl. **78**, 201 (2015)].
21. В. Г. Кадышевский, М. Д. Матеев, Р. М. Мир-Касимов, ЯФ **11**, 692 (1970) [Sov. J. Nucl. Phys. **11**, 388 (1970)].
22. В. Г. Кадышевский, Р. М. Мир-Касимов, Н. Б. Скачков, ЭЧАЯ **2**, 635 (1972) [Sov. J. Part. Nucl. **2** (3), 69 (1972)].
23. Ю. Д. Черниченко, ЯФ **80**, 396 (2017) [Phys. Atom. Nucl. **80**, 707 (2017)].
24. V. G. Kadyshevsky and M. D. Mateev, Nuovo Cimento A **55**, 275 (1968).
25. А. Д. Линкевич, В. И. Саврин, Н. Б. Скачков, ТМФ **53**, 20 (1982) [Theor. Math. Phys. **53**, 955 (1982)].
26. N. B. Skachkov and I. L. Solovtsov, Preprint No. E2-81-760, JINR (Dubna, 1981); Н. Б. Скачков, И. Л. Соловцов, ТМФ **54**, 183 (1983) [Theor. Math. Phys. **54**, 116 (1983)].
27. V. I. Savrin and N. B. Skachkov, Lett. Nuovo Cimento **29**, 363 (1980).
28. V. A. Matveev, R. M. Muradyan, and A. N. Tavkhelidze, Lett. Nuovo Cimento **5**, 907 (1972); **7**, 719 (1973); В. А. Матвеев, Р. М. Мурадян, А. Н. Тавхелидзе, ТМФ **40**, 329 (1979) [Theor. Math. Phys. **40**, 778 (1979)].
29. S. J. Brodsky and G. R. Farrar, Phys. Rev. Lett. **31**, 1153 (1973).
30. K. A. Olive *et al.* (Particle Data Group), Chin. Phys. C **38**, 090001 (2014).
31. G. Colangelo, J. Gasser, and H. Leutwyler, Nucl. Phys. B **603**, 125 (2001), arXiv:0103088v1[hep-ph].
32. José A. Oller and Luis Roca, Phys. Lett. B **651**, 139 (2007), arXiv: 0704.0039v2 [hep-ph].

## SCALAR FORM FACTOR OF THE TWO-FERMION BOUND STATE IN THE RELATIVISTIC QUASIPOTENTIAL APPROACH

Yu. D. Chernichenko

The new relativistic scalar form factor of the two relativistic equal-mass fermion bound state is obtained. Consideration is conducted within the framework of the relativistic quasipotential approach on the basis of covariant Hamiltonian formulation of quantum field theory by transition to the three-dimensional relativistic configurational representation in the case of two relativistic particles with equal masses and spin 1/2.