Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XCIII, № 5

*ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ*

С. Е. БИРМАН

# ОБ ОСАДКЕ ЖЕСТКОГО ШТАМПА НА УПРУГОМ СЛОЕ, РАСПОЛОЖЕННОМ НА НЕСЖИМАЕМОМ ОСНОВАНИИ

*(Представлено академиком В. И. Смирновым 13 X 1953)*

Задачу рассматриваем в условиях плоской деформации и при отсутствии трения в плоскостях контакта (рис. 1). В такой постановке задача сводится к рассмотрению деформированного состояния бесконечной полосы высотой $2a$, обжатой симметрично относительно оси двумя жесткими штампами; $a$ — толщина упругого слоя *.

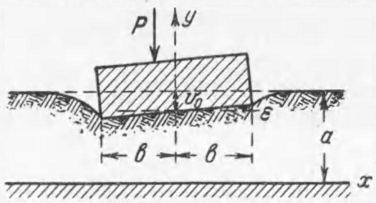


Рис. 1

Обращаясь к нашей работе ([1]), имеем для симметричного загружения полосы нормальными напряжениями:

$$\begin{gathered}2\mu(u-iv)=\frac{2k-1}{2}\int\overline{\Phi(z)}\,d\bar{z}-\frac{1}{2}\int\Phi(z)\,dz+iy\,\Phi(z)-a\Psi(z),\\ \Phi(z)+i\Psi(z)=-\frac{i}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\zeta}{\operatorname{sh}2a\zeta+2a\zeta}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\zeta(t-z+ia)\,dt\,^{**}.\end{gathered}\tag{1}$$

Отсюда на границе полосы

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{k}{2\pi\mu}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\operatorname{ch}2a\zeta-1}{\operatorname{sh}2a\zeta+2a\zeta}\,d\zeta\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin\zeta(t-x)\,dt.\tag{2}$$

Равенство (2) является исходным для решения задачи. Определив из контактного условия $f(x)$, находим затем $v(x)$.

1. Штамп с плоской подошвой шириной $2b$ загружен центрально приложенной силой $P$.

* В этой схеме вследствие симметрии $v=X_y=0$ при $y=0$, что соответствует условиям рассматриваемой задачи.

** Обозначения те же, что и в статье ([1]). Здесь $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ — вещественные на вещественной оси.

Согласно (2) в пределах подошвы штампа, очевидно, имеем

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{ch} 2a\zeta - 1}{\operatorname{sh} 2a\zeta + 2a\zeta}\, d\zeta \int_{-b}^{+b} f(t) \sin\zeta(t-x)\, dt = 0 \quad \text{при } |x| \leqslant b. \tag{3}$$

Ищем $f(x)$ в виде:

$$f(\alpha) = \frac{P}{\pi b} \frac{\sum \beta_k \cos\gamma_k\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}, \tag{4}$$

где $\alpha = x/b$, $\gamma_k$ — заданные числа в пределах $0 \leqslant \gamma_k \leqslant \pi/2$, $\beta_k$ — неизвестные коэффициенты, подлежащие определению из условия (3).

Таблица 1

| $x$ | 0 | 0,25 | 0,50 | 1,00 | 2,00 | 3,00 | 4,00 | 6,00 | 8,00 | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | 0 | 0,062 | 0,125 | 0,250 | 0,491 | 0,697 | 0,841 | 0,966 | 0,994 | 1,000 |
| $g(x)$ | 0 | 0,064 | 0,124 | 0,246 | 0,494 | 0,699 | 0,838 | 0,965 | 0,997 | 1,000 |

Аппроксимируя $g(x)$ следующим образом*:

$$g(x) = \frac{\operatorname{ch} x - 1}{\operatorname{sh} x + 1} \approx \sum s_i e^{-r_i x} =$$

$$= 1 + 0{,}426 e^{-0{,}40x} - 6{,}051\, e^{-0{,}70x} + 7{,}395\, e^{-1{,}00x} - 2{,}770\, e^{-1{,}30x} \tag{5}$$

и пользуясь интегральным представлением функций Бесселя, мы после соответствующих преобразований получаем из (3), (4) и (5)

$$\sum \beta_k \sum \frac{s_i}{N_i} \left[ A_i J_0(\gamma_k) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(\gamma_k) (A_i \cos 2n\varphi_i - B_i \sin 2n\varphi_i) \rho_i^{2n} \right] = 0$$

$$\text{при } |\alpha| \leqslant 1, \tag{6}$$

где $J_n$ — функция Бесселя $n$-го порядка; $A = \sqrt{2(N-R)}$; $B = \sqrt{2(N+R)}$; $N = \sqrt{R^2 + 4\alpha^2 p^2}$; $p = \frac{2a}{b} r$; $R = p^2 - \alpha^2 + 1$; $s^2 = \frac{1}{4}[(A-2\alpha)^2 + (B-2p)^2]$; $\operatorname{tg}\varphi = \frac{A-2\alpha}{B-2p}$ **. При этом уравнение равновесия $P = \int_{-b}^{+b} f(x)\, dx$ принимает вид

$$\sum \beta_k J_0(\gamma_k) = 1. \tag{7}$$

Из (2) имеем

$$v(x) = \frac{k}{2\pi\mu} \int_0^\infty \frac{\operatorname{ch} 2a\zeta - 1}{\zeta(\operatorname{sh} 2a\zeta + 2a\zeta)}\, d\zeta \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos\zeta(t-x)\, dt. \tag{8}$$

---

* Аппроксимация произведена по методу наименьших квадратов. Степень приближения может быть усмотрена из табл. 1.

** Здесь положено $(B/2 - p) + i(A/2 - \alpha) = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. В частности, при $p = 0$ и $\alpha \to 1$ имеем в пределе:

$$N^{-1} \left[ AJ_0(\gamma) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(\gamma) (A \cos 2n\varphi - B \sin 2n\varphi) \rho^{2n} \right] = 8 \sum_{n=1}^{\infty} nJ_{2n}(\gamma) (-1)^{n+1}.$$

Внося (4) и (5) в равенство (8), после необходимых преобразований получим

$$v_0=\frac{kP}{2\pi\mu}\sum\beta_k\sum s_i\left[J_0(\gamma_k)\ln(\sqrt{p_i^2+1}-p_i)+\sum_{n=1}^{\infty}J_{2n}(\gamma_k)\frac{(\sqrt{p_i^2+1}-p_i)^{2n}}{n}\right], \quad (9)$$

где коэффициенты $\beta$ определяются системой уравнений (6) и уравнением (7).

Если ограничиться двучленной формулой для $f(\alpha)$, то практически приемлемое приближенное значение осадки штампа можно получить, положив в (4) $\gamma_0=0$ и $\gamma_1=\pi/2$ и отыскивая значения $\beta_0$ и $\beta_1$ так, чтобы равенство (6) выполнялось при некотором $\alpha=\alpha_1$*, полученном из следующих соображений.

Обращаясь к равенству (8), разлагая $\operatorname{ch}2a\zeta$ и $\operatorname{sh}2a\zeta$ в ряды по степеням $2a\zeta$ и пренебрегая членами ряда выше второй степени, имеем

$$v(x)\approx\frac{ka}{4\mu}\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}d\zeta\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\zeta(t-x)\,dt=\frac{ka}{4\mu}f(x), \quad (10)$$

т. е. при весьма тонком сжимаемом слое давление оказывается пропорциональным осадке в каждой данной точке**. Значение $\alpha_1$ выбираем так, чтобы в этом предельном случае величина осадки, вычисленной как изложено выше, совпадала с таковой, полученной, исходя из линейного распределения напряжений в подошве штампа. Таким путем получено $\alpha_1=0{,}775$.

Для сравнения приводим таблицу значений $\varphi(\alpha)=\sum\beta_k\cos\gamma_k\alpha$ и $v_0$, вычисленных по пятичленной*** и двучленной (вторая строка) формулам при $b=a$ (см. табл. 2).

Таблица 2

| $\alpha$ | 0 | 0,25 | 0,50 | 0,75 | 1,00 | $\frac{2\pi\mu v_0}{kP}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\varphi(\alpha)$ | 1,273<br>1,277 | 1,235<br>1,237 | 1,124<br>1,123 | 0,955<br>0,953 | 0,752<br>0,752 | 0,669<br>0,670 |

2. На штамп действует пара сил.

Согласно (2) имеем

$$\frac{k}{2\pi\mu}\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{ch}2a\zeta-1}{\operatorname{sh}2a\zeta+2a\zeta}d\zeta\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\zeta(t-x)=\varepsilon \quad \text{при } |x|\leqslant b, \quad (11)$$

и ищем $f(x)$ в виде:

$$f(x)=\frac{2M\alpha}{\pi b^2}\frac{\sum'\beta_k\cos\gamma_k\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}, \quad (12)$$

---

* При $\alpha=0$ равенство (6) выполняется тождественно.

** Исключая окрестности крайних точек подошвы штампа. Отметим вообще, что формула (10) не учитывает местного эффекта, так как она следует из (8) при условии плавного изменения $f(x)$. В основном же формула (10) подтверждает соображения, высказанные в ([3]).

*** В пятичленной формуле положено $\gamma=0,\ \pi/8,\ \pi/4,\ 3\pi/8,\ \pi/2$; коэффициенты $\beta$ определены из (7) и (6) при значениях $\alpha$: 0,25; 0,50, 0,75; 1,00.

где $M$ — момент действующей пары, $\varepsilon$ — угол наклона штампа. В соответствии с изложенным выше из (10) и (11) получаем:

$$\frac{kM}{2\pi\mu b^2}\sum\beta_k\sum\frac{s_i}{N_i}\sum_{n=1}^{\infty}\left[J_{2n-2}(\gamma_k)-J_{2n}(\gamma_k)\right]\left[A_i\sin(2n-1)\varphi_i+\right.$$

$$\left.+B_i\cos(2n-1)\varphi_i\right]\rho_i^{2n-1}=\varepsilon \text{ при } |\alpha|\leqslant 1\ ^*; \tag{13}$$

при этом уравнение равновесия $M=\int\limits_{-b}^{+b}f(x)\,x\,dx$ принимает вид

$$\sum\beta_k\left[J_0(\gamma_k)-J_2(\gamma_k)\right]=1. \tag{14}$$

Если ограничиться двучленной формулой (12), то надлежит, положив $\gamma_0=0$, $\gamma_1=\pi/2$, отыскивать $\beta_0$ и $\beta_1$ из (13) и (14) так, чтобы равенство (13) выполнялось при $\alpha=0$ и $\alpha_1=0{,}835$. Это значение $\alpha_1$ получено из соображений, аналогичных изложенным выше.

Для сравнения приводим таблицу значений $\varphi(\alpha)$ и $\varepsilon$, вычисленных по пятичленной и двучленной формулам при $b=a$ (см. табл. 3).

Таблица 3

| $\alpha$ | 0 | 0,25 | 0,50 | 0,75 | 1,00 | $\frac{\pi b^2\mu\varepsilon}{kM}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\varphi(\alpha)$ | 1,245<br>1,234 | 1,219<br>1,211 | 1,147<br>1,146 | 1,045<br>1,048 | 0,935<br>0,933 | 0,703<br>0,701 |

Заметим, что, зная распределение напряжений в подошве штампа, можно вычислить напряжения в упругом слое по линиям влияния, пользуясь приближенными формулами для напряжений от единичного груза, полученными в ([2]).

Поступило
10 X 1953

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Е. Бирман, ДАН, 62, № 2 (1948). [2] С. Е. Бирман, Прикладн. матем. и мех., 14, в. 6 (1950). [3] М. И. Горбунов-Посадов, Осадки фундаментов на слое грунта, подстилаемом скальным основанием, 1946.

* В частности, при $p=0$ и $\alpha\to 1$ имеем в пределе:

$$\sum_{n=1}^{\infty}N^{-1}\left[J_{2n-2}(\gamma)-J_{2n}(\gamma)\right]\left[A\sin(2n-1)\varphi+B\cos(2n-1)\varphi\right]\rho^{2n-1}=$$

$$=2\left[J_0(\gamma)+4\sum_{n=1}^{\infty}nJ_{2n}(\gamma)(-1)^n\right].$$