Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XCIII, № 6

ГЕОФИЗИКА

А. Г. КОЛЕСНИКОВ и А. А. ПИВОВАРОВ

К РАСЧЕТУ ОСЕННЕГО ОХЛАЖДЕНИЯ ВОДОХРАНИЛИЩ

(Представлено академиком В. В. Шулейкиным 22 X 1953)

Тепловой режим водохранилищ, являющихся верхними бьефами гидроэлектростанций, представляет интерес как сам по себе, так и потому, что он определяет режим примыкающих к плотине участков нижнего бьефа. Наиболее важной для практики стадией режима является период ледообразования. Ему предшествует и в известной мере его определяет период осеннего охлаждения вод, без знания которого нельзя решить и вопрос о начале процесса ледообразования. В настоящей работе мы рассмотрим первую стадию режима, а именно задачу об осеннем охлаждении водохранилищ.

Представим водохранилище глубиной h и достаточной протяженности; примем, что имеют место изотермические условия по горизонтали. Тепло, аккумулированное за летний период как водными массами, так и слоем грунта глубиной H, слагающим дно водохранилища, на протяжении которого происходит затухание температурных колебаний, осенью начинает постепенно расходоваться. Охлаждение системы вода — грунт приводит к тому, что температура воды будет формироваться под влиянием теплообмена, как на верхней границе, т. е. с атмосферой, так и на нижней, т. е. грунтом. За начальный момент для поставленной задачи может быть принят любой из моментов периода осеннего охлаждения, концом является момент достижения на поверхности водохранилища нулевых температур.

Условимся обозначать все величины, относящиеся к атмосфере, индексом 0, к воде — индексом 1 и к грунту — индексом 2.

Будем считать известным ход во времени на протяжении периода охлаждения следующих актинометрических и метеорологических элементов, измеренных на высоте l от поверхности воды: суммарно радиации $I_0(\tau)$, эффективного излучения пиргеометра $R_0(\tau)$, температуры воздуха $t_0(\tau)$, давления водяного пара $p_0(\tau)$ и скорости ветра $v_0(\tau)$. Знание последних позволяет рассчитать все составляющие теплообмена на поверхности водохранилища.

Распространение тепла в воде осуществляется турбулентным обменом, причем будем считать, что интенсивность его такова, что позволяет принять коэффициент обмена k_1 не зависящим от глубины.

Тогда для распределения температур в воде и грунте справедливо уравнение

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = k \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}, \tag{1}$$

причем $k = k_1, -h \leqslant z < 0$; $k = k_2, 0 \leqslant z \leqslant H$, где k_2 — коэффициент температуропроводности грунта.

Граничными условиями будут:
на поверхности воды — полный тепловой баланс

$$-c_1\rho_1 k_1\left(\frac{\partial t_1}{\partial z}\right)_{z=-h} = (1-A)I_0 - aR_0 + a\sigma(T_0^4 - T_1^4) +$$
$$+ c_0\rho_0\left\{k_0(z)\frac{\partial t_0}{\partial z}\right\}_{z=-h} - r\rho_0\left\{k_0(z)\frac{\partial f_0}{\partial z}\right\}_{z=-h}; \tag{2}$$

на границе раздела вода — грунт — непрерывность температур и тепловых потоков

$$t_1(0, \tau) = t_2(0, \tau); \quad c_1\rho_1 k_1\left(\frac{\partial t_1}{\partial z}\right)_{z=0} = c_2\rho_2 k_2\left(\frac{\partial t_2}{\partial z}\right)_{z=0}; \tag{3}$$

в грунте на глубине H — затухание теплового потока

$$\left(\frac{\partial t_2}{\partial z}\right)_{z=-H} = 0\,^*. \tag{4}$$

Для распределения температур в воде и грунте в начальный момент примем

$$t(z, 0) = f(z) = \begin{cases} f_1(z), & -h < z < 0; \\ f_2(z), & 0 < z < H. \end{cases} \tag{5}$$

Вид $f(z)$ при отсутствии подробных данных может быть в интервале $-h < z < 0$ принят линейным, а в интервале $0 < z < H$ вычислен по методу, изложенному в ([1]).

Здесь c — теплоемкость; ρ — плотность; A — альбедо водной поверхности; a — лучеиспускательная способность водной поверхности; σ — коэффициент излучения абсолютно черного тела; T — абсолютная температура; $k_0(z)$ — коэффициент турбулентного обмена в приводном слое атмосферы; r — скрытая теплота испарения; $0{,}623\ p_0/B = f_0$ — удельная влажность воздуха; B — барометрическое давление.

Упростим условие (2). Полагая квази-стационарность потоков тепла и водяного пара, что, как известно, хорошо выполняется в приводном слое атмосферы, проинтегрируем два последних слагаемых (2) в пределах высоты $-h$, $-(h+l)$. Линеаризируя, кроме того, биномиальное выражение, описывающее эффективное излучение и зависимость давления насыщенного водяного пара от температуры, а именно $p_1 = \delta + \gamma t_1$, вместо (2) получим

$$c_1\rho_1 k_1\left(\frac{\partial t_1}{\partial z}\right)_{z=-h} = \alpha\,[t_1 - \varphi(\tau)]_{z=-h}, \tag{6}$$

где $\varphi(\tau) = \frac{\alpha_0}{\alpha}t_0(\tau) + \frac{(1-A)}{\alpha}I_0(\tau) - \frac{aR_0(\tau)}{\alpha} - \frac{\beta r}{\alpha}[\delta - p_0(\tau)]$; $\alpha = \alpha_0 + r\beta\gamma$; $\alpha_0 = 4a\sigma T_0^3 + \dfrac{c_0\rho_0}{\int_{-(h+l)}^{-h} k_0^{-1}(z)dz}$; $\beta = \dfrac{0{,}623}{B}\,\dfrac{\rho_0}{\int_{-(h+l)}^{-h} k_0^{-1}(z)dz}$; $\varphi(\tau)$ — эквивалентная температура, т. е. равноценная учету всех составляющих теплообмена с атмосферой.

Решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям (3), (4) и (6), ищем методом собственных функций. Однако входящие в полученное таким способом решение ряды медленно сходятся, в особенности при значениях z, приближающихся к $-h$. Поэтому для удобства выполнения практических расчетов необходимо предварительно провести улучшение их сходимости.

* Потоком тепла, вызванным геотермическим градиентом, пренебрегаем.

Если $\varphi(\tau)$ непрерывна вместе со своими первыми производными, то решение, полученное после проведения операции по улучшению сходимости рядов, можно представить в виде:

$$t(z,\ \tau)=\varphi(\tau)-\varphi(0)\sum_{n=1}^{\infty}B_nZ_n(z)\,e^{-\nu_n^2\frac{k_1\tau}{h^2}}-\sum_{n=1}^{\infty}B_nZ_n(z)\int\limits_0^{\tau}\frac{\partial\varphi(\eta)}{\partial\eta}e^{-\nu_n^2\frac{k_1}{h^2}(\tau-\eta)}d\eta+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Z_n(z)}{N_n^2}e^{-\nu_n^2\frac{k_1\tau}{h^2}}\int\limits_{-h}^{H}g(z)f(z)Z_n(z)\,dz, \tag{7}$$

где $B_n=\dfrac{c_1\rho_1h\cos\nu_n(\operatorname{tg}\nu_n+b\operatorname{tg}q\nu_n)}{\nu_n^2N_n^2}$; $b=\dfrac{c_2\rho_2}{c_1\rho_1}\sqrt{\dfrac{k_1}{k_2}}$; $q=\dfrac{H}{h}\sqrt{\dfrac{k_1}{k_2}}$; $Z_n(z)$ — собственные функции; N_n — их норма;

$$Z_n(z)=\begin{cases}Z_{1n}(z)=\cos\nu_n\dfrac{z}{h}+b\operatorname{tg}(q\nu_n)\sin\nu_n\dfrac{z}{h},\\[2mm] Z_{2n}(z)=\cos\nu_n\sqrt{\dfrac{k_1}{k_2}}\dfrac{z}{h}+\operatorname{tg}(q\nu_n)\sin\nu_n\sqrt{\dfrac{k_1}{k_2}}\dfrac{z}{h};\end{cases}$$

$$N_n^2=\frac{c_1\rho_1h}{2}\frac{\nu_n^2+\dfrac{\alpha h}{c_1\rho_1k_1}\left(1+\dfrac{\alpha h}{c_1\rho_1k_1}\right)}{\left(\nu_n\cos\nu_n+\dfrac{\alpha h}{c_1\rho_1k_1}\sin\nu_n\right)^2}+\frac{c_2\rho_2H}{2\cos^2q\nu_n};$$

$g(z)$ — вес ортогональности собственных функций, равный произведению теплоемкости на плотность среды.

Собственные значения ν_n определяются из характеристического уравнения, имеющего бесконечное множество корней:

$$\frac{\nu}{\alpha h/c_1\rho_1k_1}=\frac{1-b\operatorname{tg}\nu\operatorname{tg}q\nu}{\operatorname{tg}\nu+b\operatorname{tg}q\nu}. \tag{8}$$

Основными параметрами, определяющими полученное решение, являются безразмерные комплексы $\alpha h/c_1\rho_1k_1$ и $k_1\tau/h^2$.

Рассмотрим наиболее часто встречающийся случай малых $\alpha h/c_1\rho_1k_1<0{,}1$, соответствующий сравнительно мелководным или проточным водохранилищам. В этом случае угол наклона прямой $y(\nu)=\dfrac{\nu}{\alpha h/c_1\rho_1k_1}$ в левой части (8) близок к $\pi/2$. Последнее позволяет для определения корней ν_n при $n\geqslant2$ написать приближенное уравнение

$$\operatorname{tg}\nu+b\operatorname{tg}q\nu=0.$$

Минимальное значение корня ν_1 найдем, заменяя $\operatorname{tg}\nu_1$ и $\operatorname{tg}q\nu_1$ их аргументами, что даст

$$\nu_1^2=\frac{1-c_2\rho_2H/c_1\rho_1h}{1+c_2\rho_2H/c_1\rho_1h}\,\frac{\alpha h}{c_1\rho_1k_1}. \tag{9}$$

Собственная функция, соответствующая корню ν_1, равна

$$Z_{11}(z)=\cos\nu_1\frac{z}{h}+\frac{c_2\rho_2H}{c_1\rho_1h}\nu_1\sin\nu_1\frac{z}{h}. \tag{10}$$

Все коэффициенты B_n в (7) стремятся к нулю, за исключением B_1. Если пренебречь в силу малости всеми слагаемыми порядка ν_1^2 и выше по сравнению с единицей, то

$$B_1=\frac{1}{1-{}^1/_2\,c_2\rho_2H/c_1\rho_1h}. \tag{11}$$

Тогда для расчета температуры воды в водохранилище при малых значениях комплекса $\alpha h/c_1\rho_1 k_1$ получается удобное приближенное выражение, если в (7) подставить значения ν_1, $Z_{11}(z)$ и B_1 в соответствии с (9), (10) и (11). Выписывать его здесь мы не будем.

Часто для практики важно знать среднюю по вертикали температуру воды. Подставив в (7) вместо $Z_n(z)$ собственные функции для воды $Z_{1n}(z)$ и интегрируя в пределах глубины водохранилища, а также раскрывая вид $f(z)$, найдем ход во времени средней по глубине температуры воды

$$\bar{t}(\tau) = \varphi(\tau) - \varphi(0)\sum_{n=1}^{\infty} \bar{B}_n e^{-\nu_n^2 \frac{k_1\tau}{h^2}} - \sum_{n=1}^{\infty} \bar{B}_n \int_0^{\tau} \frac{\partial\varphi(\eta)}{\partial\eta} e^{-\nu_n^2 \frac{k_1}{h^2}(\tau-\eta)} d\eta +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\nu_n \sin\nu_n - (1 - \cos\nu_n)\dfrac{\alpha h}{c_1\rho_1 k_1}}{\nu_n N_n\left(\nu_n\cos\nu_n + \dfrac{\alpha h}{c_1\rho_1 k_1}\sin\nu_n\right)} \left\{c_1\rho_1 \int_{-h}^{0} f_1(z)\, Z_{1n}(z)\, dz + \right.$$

$$\left. + c_2\rho_2 \int_0^H f_2(z)\, Z_{2n}(z)\, dz \right\}, \qquad (12)$$

где $\bar{B} = \dfrac{\alpha h^2}{k_1\nu_n^2 N_n^2} \dfrac{\nu_n \sin\nu_n + \dfrac{\alpha h}{c_1\rho_1 k_1}(1 - \cos\nu_n)}{\left(\nu_n\cos\nu_n + \dfrac{\alpha h}{c_1\rho_1 k_1}\sin\nu_n\right)^2}$. Из (12) также легко получить приближенное выражение, воспользовавшись (9), (10) и (11).

Найденные выражения (7) и (12) дают возможность рассчитать изменения температуры воды в водохранилище как по глубине, так и во времени на протяжении всего периода осеннего охлаждения, если известны актинометрические и метеорологические элементы, входящие в функцию $\varphi(\tau)$, гидрологические условия, определяющие k_1 и распределение температуры в воде $f_1(z)$ и грунте $f_2(z)$ в начальный момент. Кроме того, они позволяют оценить, как будет изменяться естественный термический режим с изменением гидрологических условий, вызванных гидротехническими сооружениями.

Физический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова

Поступило
28 IX 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Г. Колесников, ДАН, 92, № 1 (1953).