

Н. А. ШАНИН

О НЕКОТОРЫХ ОПЕРАЦИЯХ НАД ЛОГИКО-АРИФМЕТИЧЕСКИМИ  
ФОРМУЛАМИ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 10 X 1953)

§ 1. Мы будем пользоваться следующей логико-арифметической терминологией и символикой. Элементарные знаки:

$0, ', +, \times, (, ), t, =, \&, \vee, \supset, \neg, \forall, \exists$ .

Натуральные числа (или, коротко, числа):  $0, 0', 0'', 0''', 0''''$ , ...  
Предметные переменные (или, коротко, переменные):  $(t), (tt), (ttt), (tttt)$ , ...\*. Термы:  $0$  есть терм; всякая переменная есть терм; если  $T$  — терм, то слово  $T'$  также есть терм; если  $T_1$  и  $T_2$  — термы, то слова  $(T_1 + T_2)$  и  $(T_1 \times T_2)$  также являются термами.

Элементарные формулы: слова вида  $(T_1 = T_2)$ , где  $T_1$  и  $T_2$  — термы. Логико-арифметические формулы (или, коротко, формулы): всякая элементарная формула является формулой; если  $P$  и  $Q$  — формулы, то слова  $(P \& Q)$ ,  $(P \vee Q)$ ,  $(P \supset Q)$  и  $\neg P$  являются формулами; если  $P$  — формула и  $X$  — переменная, то слова  $\forall X P$  и  $\exists X P$  являются формулами.

Логической длиной формулы  $R$  называется суммарное число вхождений в  $R$  знаков  $\&, \vee, \supset, \neg, \forall, \exists$ . Вхождения переменных в формулы подразделяются на свободные и связанные (см., например, (1)). Формула  $R$  называется постоянной формулой, если ни одна переменная не входит в  $R$  свободно. Будем говорить, что формула  $P$ , переменная  $X$  и терм  $T$  согласованы, если  $X$  не входит свободно ни в какую подформулу формулы  $P$ , представимую в виде  $\forall Y G$  или в виде  $\exists Y G$ , где  $G$  — какая-либо формула и  $Y$  — какая-либо переменная, входящая в терм  $T$ .

Кроме элементарных знаков, перечисленных выше, будут употребляться вспомогательные знаки  $\equiv, \underline{\quad}, \bar{\quad}, \mathbb{F}$  и  $\mathbb{I}$ . Если  $P$  и  $Q$  — какие-либо формулы, то выражение  $(P \equiv Q)$  будет применяться в качестве сокращенной записи формулы  $((P \supset Q) \& (Q \supset P))$ , а запись  $P \underline{\quad} Q$  будет означать: формула  $P$  графически равна формуле  $Q$ . Результат подстановки терма  $T$  вместо каждого свободного вхождения переменной  $X$  в формулу  $P$  обозначается через  $F_T^X P$ .

Формула  $R$  называется конструктивно истинной, если она имеет реализацию в смысле С. Клина (см. (2)\*\*). Если же формула не

\* Такой способ введения переменных предложен А. А. Марковым.

\*\* Предложенные С. Клином конструктивные принципы истолкования арифметических суждений (см. (2)) представляют собой уточнение применительно к арифметике разработанных А. Н. Колмогоровым (3) конструктивных принципов истолкования задач.

имеет реализации, то она называется конструктивно ложной. С. Клин доказал <sup>(2)</sup>, что можно построить формулу  $\Gamma$ , содержащую свободные вхождения некоторой переменной  $X$  и такую, что формула  $\forall X(\Gamma \vee \neg \Gamma)$  не имеет реализации и, следовательно, формулы  $\forall X(\Gamma \vee \neg \Gamma)$  и  $(\Gamma \vee \neg \Gamma)$  являются конструктивно ложными\*. Мы фиксируем букву  $\Gamma$  для обозначения такой формулы.

§ 2. Основное конструктивное логико-арифметическое исчисление (или, коротко, исчисление  $\Sigma$ ) характеризуется следующим образом. Аксиомами этого исчисления являются любые формулы перечисленных ниже типов (1) — (24). В списке типов аксиом от пункта (1) до пункта (20) буквы  $P$ ,  $Q$  и  $R$  символизируют произвольные формулы,  $X$  — произвольную переменную и  $T$  — произвольный терм. В пунктах (21) — (24) эти буквы имеют тот же смысл, что и в предыдущих пунктах, но произвол в выборе замещений для символов  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ ,  $X$  и  $T$  ограничен: допустимые замещения выделяются в каждом пункте особым условием.

Аксиомы для равенства и аксиомы Пеано:

$$(X = X), \quad (1)$$

$$((X = Y) \supset ((X = Z) \supset (Y = Z))), \quad (2)$$

$$((X = Y) \supset (X' = Y')), \quad (3)$$

$$((X' = Y') \supset (X = Y)), \quad (4)$$

$$\neg (X' = 0), \quad (5)$$

$$((F_0^X P \mid \& \forall X (P \supset F_X^X \cdot P \mid)) \supset \forall X P). \quad (6)$$

Аксиомы, определяющие рекурсивно сложение и умножение чисел:

$$((X + 0) = X), \quad (7)$$

$$((X + Y') = (X + Y)), \quad (8)$$

$$((X \times 0) = 0), \quad (9)$$

$$((X \times Y') = ((X \times Y) + X)). \quad (10)$$

Логико-арифметические аксиомы:

$$(P \supset (Q \supset P)), \quad (11)$$

$$((P \supset (Q \supset R)) \supset ((P \supset Q) \supset (P \supset R))), \quad (12)$$

$$(P \supset (Q \supset (P \& Q))), \quad (13)$$

$$((P \& Q) \supset P), \quad (14)$$

$$((P \& Q) \supset Q), \quad (15)$$

$$(P \supset (P \vee Q)), \quad (16)$$

$$(Q \supset (P \vee Q)), \quad (17)$$

$$((P \supset R) \supset ((Q \supset R) \supset ((P \vee Q) \supset R))), \quad (18)$$

$$((P \supset Q) \supset ((P \supset \neg Q) \supset \neg P)), \quad (19)$$

$$(\neg P \supset (P \supset Q)), \quad (20)$$

$$(\forall X (P \supset Q) \supset (P \supset \forall X Q)) \quad (21)$$

(ограничение:  $X$  не входит свободно в  $P$ ),

$$(\forall X (P \supset Q) \supset (\exists X P \supset Q)) \quad (22)$$

\* В настоящее время известны уже многие формулы с этими свойствами. Такие формулы получаются посредством арифметизации некоторых массовых задач, не допускающих алгоритмического решения.

(ограничение:  $X$  не входит свободно в  $Q$ ),

$$(\forall X P \supset F_T^X P \mid) \quad (23)$$

(ограничение:  $P$ ,  $X$  и  $T$  согласованы),

$$(F_T^X P \mid \supset \exists X P) \quad (24)$$

(ограничение:  $P$ ,  $X$  и  $T$  согласованы).

Выводимые в исчислении  $\Sigma$  формулы характеризуются следующим индуктивным определением: а) любая аксиома исчисления  $\Sigma$  является выводимой в  $\Sigma$  формулой; б) если  $P$  и  $R$  — выводимые в  $\Sigma$  формулы и  $R$  имеет вид  $(P \supset Q)$ , где  $Q$  — некоторая формула, то и  $Q$  является выводимой в  $\Sigma$  формулой; в) если  $P$  — выводимая в  $\Sigma$  формула и  $X$  — любая переменная, то  $\forall X P$  является выводимой в  $\Sigma$  формулой.

Д. Нельсон доказал (см (4)), что всякая выводимая в исчислении  $\Sigma$  формула конструктивно истинна\*. Формулы  $(\Gamma \vee \neg \Gamma)$  и  $\forall X (\Gamma \vee \neg \Gamma)$  невыводимы в  $\Sigma$ , так как они не являются конструктивно истинными формулами.

Кроме основного конструктивного логико-арифметического исчисления, в дальнейшем будет фигурировать также основное классическое логико-арифметическое исчисление (или, коротко, исчисление  $\Sigma^+$ ). Аксиомами этого исчисления являются, во-первых, аксиомы исчисления  $\Sigma$  и, во-вторых, всевозможные формулы вида  $(P \vee \neg P)$ , где  $P$  — любая формула. Определение выводимых в исчислении  $\Sigma^+$  формул получается из определения выводимых в исчислении  $\Sigma$  формул посредством замены символа  $\Sigma$  символом  $\Sigma^+$ .

§ 3. Всякий алгоритм, применимый к любой формуле и перерабатывающий каждую формулу в формулу, будем называть операцией. Результат применения операции  $\alpha$  к формуле  $R$  будем обозначать через  $\alpha R$ .

Будем говорить, что операция  $\xi$  определяет частный тип понятия конструктивной истинности, если, какова бы ни была формула  $R$ , конструктивно истинна формула  $(\xi R \supset R)$ . Будем говорить, что операция  $\eta$  определяет частный тип понятия конструктивной ложности, если, какова бы ни была формула  $R$ , конструктивно истинна формула  $(\eta R \supset \neg R)$ .

Интересный частный тип понятия конструктивной ложности ввел Д. Нельсон (5)\*. Этот тип ложности можно определить посредством операции  $\tau$ , характеризующейся следующим образом:

$$\begin{aligned} \tau(T = S) \underline{\circ} \neg(T = S), \quad \tau(P \& Q) \underline{\circ} (\tau P \vee \tau Q), \\ \tau(P \vee Q) \underline{\circ} (\tau P \& \tau Q), \quad \tau(P \supset Q) \underline{\circ} (P \& \tau Q), \\ \tau \neg P \underline{\circ} P, \quad \tau \forall X P \underline{\circ} \exists X \tau P, \quad \tau \exists X P \underline{\circ} \forall X \tau P, \end{aligned}$$

где  $T$  и  $S$  — любые термы,  $P$  и  $Q$  — любые формулы,  $X$  — любая переменная. Какова бы ни была формула  $R$ , в исчислении  $\Sigma$  выводима формула  $(\tau R \supset \neg R)$ . Отсюда следует, что  $\tau$  определяет частный тип понятия конструктивной ложности.

В настоящем сообщении вводятся две новые операции  $\Delta_0$  и  $\nabla_0$ , из которых первая определяет частный тип понятия конструктивной истинности, а вторая определяет частный тип понятия конструктивной ложности.

\* Исчисление, исследованное Д. Нельсоном, несколько отличается от  $\Sigma$ , однако различие проявляется лишь в несущественных технических деталях.

\*\* См. также А. А. Марков (6).

§ 4. Операции  $\Delta_0$  и  $\nabla_0$  характеризуются совместно следующим образом:

$$\begin{array}{l} \Delta_0(T=S) \underline{\underline{\circ}} (T=S) \\ \Delta_0(P \& Q) \underline{\underline{\circ}} (\Delta_0 P \& \Delta_0 Q) \\ \Delta_0(P \vee Q) \underline{\underline{\circ}} (\Delta_0 P \vee \Delta_0 Q) \\ \Delta_0(P \supset Q) \underline{\underline{\circ}} (\nabla_0 P \vee \Delta_0 Q) \\ \Delta_0 \neg P \underline{\underline{\circ}} \nabla_0 P \\ \Delta_0 \forall X P \underline{\underline{\circ}} \forall X \Delta_0 P \\ \Delta_0 \exists X P \underline{\underline{\circ}} \exists X \Delta_0 P \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \nabla_0(T=S) \underline{\underline{\circ}} \neg (T=S) \\ \nabla_0(P \& Q) \underline{\underline{\circ}} (\nabla_0 P \vee \nabla_0 Q) \\ \nabla_0(P \vee Q) \underline{\underline{\circ}} (\nabla_0 P \& \nabla_0 Q) \\ \nabla_0(P \supset Q) \underline{\underline{\circ}} (\Delta_0 P \& \nabla_0 Q) \\ \nabla_0 \neg P \underline{\underline{\circ}} \Delta_0 P \\ \nabla_0 \forall X P \underline{\underline{\circ}} \exists X \nabla_0 P \\ \nabla_0 \exists X P \underline{\underline{\circ}} \forall X \nabla_0 P \end{array} \right.$$

где  $T$  и  $S$  — любые термы,  $P$  и  $Q$  — любые формулы,  $X$  — любая переменная.

Теорема 1. Какова бы ни была формула  $R$ , в исчислении  $\Sigma$  выводимы формулы:

$$(\Delta_0 R \supset R), \quad (\nabla_0 R \supset \neg R),$$

а в исчислении  $\Sigma^+$  выводимы формулы:

$$(\Delta_0 R \equiv R), \quad (\nabla_0 R \equiv \neg R).$$

Следствие 1. Операция  $\Delta_0$  определяет частный тип понятия конструктивной истинности, а операция  $\nabla_0$  определяет частный тип понятия конструктивной ложности.

Следствие 2. Какова бы ни была формула  $R$ , в исчислении  $\Sigma$  выводимы формулы:  $(R \supset \neg \nabla_0 R)$ ,  $(\Delta_0 R \supset \neg \nabla_0 R)$ ,  $(\nabla_0 R \supset \neg \Delta_0 R)$ ,  $\neg (\Delta_0 R \& \nabla_0 R)$ .

Теорема 2. Какова бы ни была формула  $R$ , справедливы графические равенства:  $\Delta_0 \Delta_0 R \underline{\underline{\circ}} \Delta_0 R$ ,  $\nabla_0 \Delta_0 R \underline{\underline{\circ}} \nabla_0 R$ ,  $\nabla_0 \nabla_0 R \underline{\underline{\circ}} \Delta_0 R$ ,  $\nabla_0 \Delta_0 R \underline{\underline{\circ}} \nabla_0 R$ .

Теорема 3. Какова бы ни была формула  $R$ , в исчислении  $\Sigma$  выводима формула  $(\nabla_0 R \supset \tau R)$ .

Теоремы 1—3 доказываются методом индукции по логической длине формул.

Замечание. Среди формул, представимых в виде  $(R \supset \Delta_0 R)$ , имеются конструктивно ложные формулы. То же самое можно сказать о формулах, представимых в виде  $(\neg R \supset \nabla_0 R)$ , и о формулах, представимых в виде  $(\tau R \supset \nabla_0 R)$ . Действительно, конструктивно ложными являются следующие постоянные формулы:  $(R_2 \supset \Delta_0 R_2)$ ,  $(\neg R_1 \supset \nabla_0 R_1)$ ,  $(\tau R_3 \supset \nabla_0 R_3)$ , где  $R_1 \underline{\underline{\circ}} \exists X \neg (\Gamma \vee \neg \Gamma)$ ,  $R_2 \underline{\underline{\circ}} \forall X \neg \neg (\Gamma \vee \neg \Gamma)$ ,  $R_3 \underline{\underline{\circ}} \exists X \neg \neg \neg (\Gamma \vee \neg \Gamma)$ .

Каждое вхождение знака  $\neg$  в произвольную формулу  $H$ , непосредственно примыкающее (слева) к какому-либо вхождению в  $H$  элементарной формулы, будем называть элементарным вхождением знака  $\neg$ . Разность между логической длиной формулы  $H$  и числом элементарных вхождений в  $H$  знака  $\neg$  обозначим через  $\mu(H)$ . Справедливо следующее утверждение:

Какова бы ни была формула  $R$ , формулы  $\Delta_0 R$  и  $\nabla_0 R$  не содержат знака  $\supset$ , а все вхождения знака  $\neg$  являются элементарными вхождениями. При этом  $\mu(\Delta_0 R) \leq \mu(R)$  и  $\mu(\nabla_0 R) \leq \mu(R)$ .

Поступило  
8 X 1953

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> A. Church, Introduction to Mathematical Logic, 1, Princeton, 1944.  
<sup>2</sup> S. C. Kleene, J. Symb. Logic, 10, No. 4, 109 (1945). <sup>3</sup> А. Н. Колмогоров, Math. Zs., 35, No. 1, 58 (1932). <sup>4</sup> D. Nelson, Trans. Am. Math. Soc., 61, No. 2, 307 (1947). <sup>5</sup> D. Nelson, J. Symb. Logic, 14, No. 1, 16 (1949). <sup>6</sup> А. А. Марков, Усп. матем. наук, 5, № 3 (37), 187 (1950).