Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XCIII, № 5

МАТЕМАТИКА

ХУА ЛО-КЭН

К ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ МНОГИХ КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

ОБ ОДНОЙ ПОЛНОЙ ОРТОНОРМАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ В ГИПЕРБОЛИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ МАТРИЦ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 30 XI 1953)

Пусть R — некоторое ограниченное пространство нескольких комплексных переменных. Известно [1], что в пространстве аналитических функций с интегрируемым квадратом в R существует полная ортонормальная система функций. Обычно нелегко бывает найти определенную систему для заданной специальной области. Целью предлагаемой серии заметок является изложение некоторых результатов, касающихся неприводимых ограниченных транзитивных симметрических областей Э. Картана. Именно, в предлагаемой заметке строится полная ортонормальная система для гиперболического пространства прямоугольных матриц.

Пусть m и n — целые числа, $n \geqslant m \geqslant 1$. Мы используем $Z\,(=Z^{(m,\,n)})$ как типичное обозначение некоторой $m \times n$ матрицы с комплексными элементами z_{jk} $(j=1, 2, \ldots, m;\ k=1, 2, \ldots, n)$. Множество $\mathfrak{R}$ матриц Z, для которых эрмитова матрица $I^{(n)} - Z\overline{Z}'$ положительно-определена, называется гиперболическим пространством $m \times n$ матриц.

Для $m=n=2$ результат частного характера был получен Митчелом. Главная трудность на пути получения полного результата состоит в приложении результатов и аппарата теории представлений линейных групп.

Прежде всего предположим, что $n=m$. Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ суть два неприводимых представления общей линейной n-мерной группы, и пусть a и b — порядки представлений $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, соответственно. Матрице $X\,(=X^{(n,\,n)})$ соответствуют $A(X)$ в $\mathfrak{A}$ и $B(X)$ в $\mathfrak{B}$. Предположим далее, что $A(U)$ и $B(U)$ унитарны для унитарных U. Рассмотрим интеграл

$$\int_{\mathfrak{R}} \cdots \int A(Z)\, P^{(a,\,b)}\, \overline{B(Z)'}\, \dot{Z} = Q^{(a,\,b)}, \tag{1}$$

где $\dot{Z} = \prod_{j=1}^{m} \prod_{k=1}^{m} dx_{jk}\, dy_{jk}$, $\quad z_{jk} = x_{jk} + iy_{jk}$ и $\overline{B}'$ — транспонированная матрица комплексно-сопряженная к B.

Умножая (1) слева на $A(U)$ и справа на $B(U)$, мы получим непосредственно, что $A(U)\,Q = QB(U)$. Применяя лемму Шура, после некоторых выкладок получим следующий результат:

Пусть $A(X) = (a_{jk}(X))$ и $B(X) = (b_{jk}(X))$. Если $A(X)$ и $B(X)$ обозначают два неэквивалентных представления, то имеем:

$$\int_{\mathfrak{R}} \cdots \int a_{jk}(Z)\, \overline{b_{st}(Z)}\, \dot{Z} = 0 \tag{2}$$

и

$$\int\limits_{\mathfrak{R}}\ldots\int a_{jk}(Z)\,\overline{a_{st}(Z)}\,\dot{Z}=\begin{cases}0, & \text{если } j\neq s \text{ или } k\neq t;\\ \rho, & \text{если } j=s \text{ и } k=t,\end{cases}\tag{3}$$

где ρ — некоторая константа, не зависящая от j и k и зависящая только от представления a.

Трудной частью настоящего исследования является вычисление нормирующего множителя ρ. Пусть $\sigma(M)$ обозначает след матрицы M. Тогда из формулы (3) следует, что:

$$a^2\rho=\int\limits_{\mathfrak{R}}\ldots\int\sigma(A(Z)\,\overline{A(Z)}')\,\dot{Z}=\int\limits_{\mathfrak{R}}\ldots\int\chi(Z\overline{Z}')\,\dot{Z},\tag{4}$$

где χ обозначает характер представления. Чтобы оценить величину интеграла (4), введем «полярную координату» некоторой матрицы. В самом деле, известно, что каждая матрица Z может быть выражена в виде $U\Lambda V$, где U и V унитарны и $\Lambda=[\lambda_1,\ldots,\lambda_n]$ диагональна. Путем сложной выкладки получим, что

$$a^2\rho=2^{-n}\omega_n\,\dot{\omega}_n\int\limits_0^1\ldots\int\limits_0^1\chi(\Lambda)\,\Delta(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)^2\,d\lambda_1\ldots d\lambda_n,\tag{5}$$

где $\Delta(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)=\prod\limits_{n\geqslant j>k\geqslant 1}(\lambda_j-\lambda_k)$, ω_n — полный унитарный объем, а $\dot{\omega}_n=\int\limits_{[U]}\ldots\int[d\omega_U]$ — интеграл по пространству $[U]$ левых классов смежности унитарной группы по ее подгруппе диагональных матриц.

Более точно, пусть $\chi_{f_1,\ldots,f_n}(Z)$ — характер некоторого представления $A_{f_1,\ldots,f_n}$ с сигнатурой $(f_1,\ldots,f_n)$, где $f_1,\ldots,f_n$ — целые числа, удовлетворяющие неравенствам

$$f_1\geqslant f_2\geqslant\ldots\geqslant f_n\geqslant 0.$$

Порядок представления, как известно, равен

$$N(f_1,\ldots,f_n)=D(l_1,\ldots,l_n)\,/\,D(n-1,\,n-2,\ldots,0),$$

где

$$D(x_1,\ldots,x_n)=\prod_{j<k}(x_j-x_k) \text{ и } l_n=f_n,\ l_{n-1}=f_{n-1}+1,\ldots,\ l_1=f_1+n-1.$$

Известно также, что

$$\chi_{f_1,\ldots,f_n}([\lambda_1,\ldots,\lambda_n])=|\lambda^{l_1},\ldots,\lambda^{l_n}|\,/\,\Delta(\lambda_1,\ldots,\lambda_n),\tag{6}$$

где

$$|\lambda^{l_1},\ldots,\lambda^{l_n}|=\begin{vmatrix}\lambda_1^{l_1}&\ldots&\lambda_1^{l_n}\\ \cdot&\cdot\;\cdot&\cdot\\ \lambda_n^{l_1}&\ldots&\lambda_n^{l_n}\end{vmatrix}$$

и

$$\Delta(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)=|\lambda^{n-1},\ldots,\lambda,1|.$$

Пусть $\rho_{f_1,\ldots,f_n}$ — константа, отвечающая представлению с сигнатурой $(f_1,\ldots,f_n)$; тогда получаем окончательно

$$\rho_{f_1,\ldots,f_n}=\frac{\pi^2}{N(f_1,\ldots,f_n)}\prod_{j=1}^{n}\frac{l_j!}{(n+l_j)!}.\tag{7}$$

Обозначим через

$$A_{f, \ldots, f_n}(Z) = (a_{jk}^{f_1, \ldots, f_n}(Z)), \ 1 \leqslant j, \ k \leqslant N(f_1, \ldots, f_n),$$

представление с сигнатурой $(f_1, \ldots, f_n)$. Мы показали, что функции $a_{jk}^{f_1, \ldots, f_n}(Z) / \rho_{f_1, \ldots, f_n}^{1/2}$ $(f_1 \geqslant f_2 \geqslant \ldots \geqslant f_n \geqslant 0)$ образуют полную ортонормальную систему в рассматриваемом пространстве $\mathfrak{R}$. Тогда ядро Фурье пространства $\mathfrak{R}$ равно

$$K(Z, W) = \sum_{f_1 \geqslant \ldots \geqslant f_n \geqslant 0} \sum_{j, k} a_{jk}^{f_1, \ldots, f_n}(Z) \, a_{jk}^{f_1, \ldots, f_n}(\overline{W}) / \rho_{f_1, \ldots, f_n} =$$

$$= \frac{1}{\pi^{n^2}} \sum_{l_1 > l_2 > \ldots > l_n > 0} \prod_{j=1}^{n} \frac{(n + l_j)!}{l_j!} N(f_1, \ldots, f_n) \, \chi_{f_1, \ldots, f_n}(\Delta \overline{W}').$$

В результате нескольких лемм, которые здесь опускаются, получаем:

$$K(Z, W) = \nu^{-1} \det (I - Z\overline{W}')^{-2n},$$

где

$$\nu = \pi^{n^2}((n-1)! \ldots 1!)^2 / ((2n-1)! \ldots 2! \, 1!).$$

Метод, использованный в настоящей работе, дает возможность получить формулу Коши. Множество $\mathfrak{L}$, образованное унитарными матрицами U,— характеристическое множество пространства $\mathfrak{R}$. Применим гармонический анализ на $\mathfrak{L}$; функции $a_{jk}^{f_1, \ldots, f_n}(U) / \tau_{f_1, \ldots, f_n}^{1/2}$ образуют ортонормальное множество на $\mathfrak{L}$, где

$$\tau_{f_1, \ldots, f_n} = \omega / N(f_1, \ldots, f_n)$$

и $\omega = \int_{\mathfrak{L}} \ldots \int \dot{U}$. Поэтому

$$\sum_{f_1 \geqslant f_2 \geqslant \ldots \geqslant f_n \geqslant 0} \frac{1}{\tau_{f_1, \ldots, f_n}} \sum_{j, k} a_{jk}^{f_1, \ldots, f_n}(\overline{U}') \, a_{jk}^{f_1, \ldots, f_n}(Z) = \omega^{-1} \det (Z - Z\overline{U}')^{-n}.$$

Мы получаем формулу Коши:

$$\frac{1}{\omega} \int_{\mathfrak{L}} \ldots \int \frac{f(U)}{\det (I - ZU')^n} \dot{U} = f(Z).$$

Результат может быть распространен на случай $m \neq n$. Ядро Фурье пространства $\mathfrak{R}$ равно:

$$\frac{(m+n-1)! \ldots 1!}{\pi^{mn}(n-1)! \ldots 1! \, (m-1)! \ldots 1!} \det (I - Z\overline{W}')^{-n-m}.$$

Можно также получить формулу Коши, в которой интеграл распространен на множество $\mathfrak{S}(m \times n)$ матриц Z, удовлетворяющих соотношению $Z\overline{Z}' = 1$. Заметим, что для $m \neq n$ мы можем продвинуться еще далее до некоторого подмножества множества $\mathfrak{S}$, точнее, мы можем установить некоторую формулу Коши для интеграла, распространенного по многообразию меньшего числа измерений, чем $\mathfrak{S}$.

Институт математики
Академии наук
Китайской Народной Республики

Поступило
2 VI 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. А. Фукс, Теория аналитических функций многих комплексных переменных, 1948.