Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XCIII, № 6

ГЕОФИЗИКА

Е. М. ДОБРЫШМАН и С. Л. БЕЛОУСОВ

О ДВУСЛОЙНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ВОЗДУХ — ПОЧВА

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 26 X 1953)

1. Тепловой режим приземного слоя воздуха определяется главным образом теплопроводностью и излучением с поверхности почвы, так что во многих случаях (например, при прогнозе радиационных заморозков) можно пренебречь влиянием переноса тепла, обусловленного медленным перемещением воздушных масс. В этом случае дифференциальные уравнения, описывающие изменение отклонений температуры в воздухе T и в почве T^* от некоторых средних значений $\overline{T}$ и $\overline{T^*}$ (близких к 0°) можно взять в упрощенном виде:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} k_0 \left(\frac{z}{z_0}\right)^{1-1/\nu} \frac{\partial T}{\partial z} \quad (z > 0); \qquad \frac{\partial T}{\partial z} = k^* \frac{\partial^2 T^*}{\partial z^2} \quad (z < 0)$$

с условиями:

при $t = 0$: $T(z, t) = \Phi(z)$, $\quad T^*(z, t) = \Phi^*(z)$;

при $z \to 0$ $\quad T(+0, t) = T^*(-0, t)$ — отсутствие скачка температуры;

$\lim\limits_{z \to +0} -\lambda_0 \left(\frac{z}{z_0}\right)^{1-1/\nu} \frac{\partial T}{\partial z} + \lambda^* \frac{\partial T^*}{\partial z} + \mu T = F(t)$ — условие теплового баланса;

при $z \to \infty$ $T(z, t)$ ограничено; при $z \to -\infty$ $T^*(z, t)$ ограничено. Здесь z — вертикальная координата, отсчитываемая от поверхности почвы; t — время; z_0 — «высота шероховатости»; λ^*, k^* — коэффициенты тепло- и температуропроводности почвы; λ_0, k_0 — то же для воздуха на уровне z_0; ν, μ — параметры, характеризующие турбулентный обмен в воздухе и излучение с поверхности почвы ($\nu > 0$, обычно $\nu \approx 5 - 10$; $\mu \approx 10^{-4}$ кал/см^2·сек·град); $F(t)$ — изменяющийся со временем приток тепла к поверхности почвы; в зависимости от конкретной задачи этот приток может быть обусловлен изменением облачности, длинноволновым излучением атмосферы, конденсацией влаги и т. д.

Зададим характерную величину притока тепла к поверхности земли Q, так что $F = Qf$. Положим теперь

$$T = \frac{Q}{\mu} \vartheta(\tau, \zeta), \quad T^* = \frac{Q}{\mu} \vartheta^*(\tau, \xi), \quad \Phi = \frac{Q}{\mu} \varphi(\zeta), \quad \Phi^* = \frac{Q}{\mu} \varphi^*(\xi),$$

$$\frac{z}{z_0} = \left(\frac{\lambda_0}{\mu z_0}\right)^{\nu} \zeta_{z<0}, \frac{z}{z_0} = -\left(\frac{\lambda_0}{\mu z_0}\right)^{(1+\nu)/2} \sqrt{\frac{k^*}{k_0}} \xi_{z<0}, t = \left(\frac{\lambda_0}{\mu z_0}\right)^{1+\nu} \frac{z_0^2}{k_0} \tau.$$

(Если $F = 0$, то можно задать характерное значение отклонения температуры в начальный момент T_0, так что $\Phi = T_0 \varphi$. В этом случае в последних формулах Q/μ следует заменить на T_0).

Разобьем решение задачи на две части. Положим $\vartheta(\tau, \zeta) = \vartheta_1(\tau, \zeta) + \vartheta_2(\tau, \zeta)$ и $\vartheta^*(\tau, \xi) = \vartheta_1^*(\tau, \xi) + \vartheta_2^*(\tau, \xi)$, причем $L(\vartheta_1) \equiv \frac{\partial \vartheta_1}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta^{1-1/\nu} \frac{\partial \vartheta_1}{\partial \zeta}$,

$$L^*(\vartheta_1^*) \equiv \frac{\partial \vartheta_1^*}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 \vartheta_1^*}{\partial \xi^2} = 0, \qquad \vartheta_1(0, \zeta) = \varphi(\zeta), \quad \vartheta_1^*(0, \xi) = \varphi^*(\xi), \qquad \vartheta_1(\tau, 0) =$$

$\vartheta_1^*(\tau, 0) = 0$; $\vartheta_1(\tau, \infty)$ и $\vartheta_1^*(\tau, \infty)$ ограничены.

Тогда для ϑ_2 и ϑ_2^* получим систему уравнений с условиями:

$$L(\vartheta_2)=0,\quad L^*(\vartheta_2^*)=0,\quad \vartheta_2(0,\zeta)=\vartheta_2^*(0,\xi)=0,\quad \vartheta_2(\tau,0)=\vartheta_2^*(\tau,0),$$

$$\lim_{\substack{\zeta\to 0\\ \xi\to 0}}\left\{-\zeta^{1-1/\nu}\frac{\partial\vartheta_2}{\partial\zeta}-\varkappa\frac{\partial\vartheta_2^*}{\partial\xi}+\vartheta_2\right\}=f(\tau)+\lim_{\substack{\zeta\to 0\\ \xi\to 0}}\left\{\zeta^{1-1/\nu}\frac{\partial\vartheta_1}{\partial\zeta}+\varkappa\frac{\partial\vartheta_1^*}{\partial\xi}\right\}=f_2(\tau).$$

Здесь $\varkappa=\dfrac{\lambda^*}{\sqrt{k^*}}\dfrac{\sqrt{k_0}}{\lambda_0}\left(\dfrac{\mu z_0}{\lambda_0}\right)^{(\nu-1)/2}$ — безразмерный параметр.

2. Определение ϑ_1 и ϑ_1^*. Для ϑ_1^* имеется классическое решение

$$\vartheta_1^*(\tau,\xi)=\frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}}\int_0^\infty\varphi^*(\xi')\left\{\exp\left[-\frac{(\xi-\xi')^2}{4\tau}\right]-\exp\left[-\frac{(\xi+\xi')^2}{4\tau}\right]\right\}d\xi'.$$

Отсюда $$\left.\frac{\partial\vartheta_1^*}{\partial\xi}\right|_{\xi\to 0}=\frac{1}{\sqrt{\pi\tau}}\int_0^\infty\varphi^*(\xi')\left\{\exp\left(-\frac{\xi'^2}{4\tau}\right)\right\}\frac{\xi'd\xi'}{2\tau}.$$

Решение для $\vartheta_1(\zeta,\tau)$ можно получить в виде *

$$\vartheta_1(\tau,\zeta)=\int_0^\infty\frac{\varphi(\zeta')\,(\zeta\zeta')^{1/2\nu}}{\left(1+\frac{1}{\nu}\right)\tau}\left\{\exp\left[-\frac{\zeta^{(1+\nu)/\nu}+\zeta'^{\,(1+\nu)/\nu}}{\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^2\tau}\right]\right\}I_{\frac{1}{1+\nu}}\left[\frac{2\,(\zeta\zeta')^{(\nu+1)/2\nu}}{\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^2\tau}\right]d\zeta'.$$

Отсюда

$$\lim_{\zeta\to 0}\zeta^{1-1/\nu}\frac{\partial\vartheta_1}{\partial\zeta}=\int_0^\infty\frac{\varphi(\zeta')\,2\left(\frac{\nu}{1+\nu}\right)^{1/(1+\nu)}}{\Gamma\left(\frac{1}{1+\nu}\right)}\left\{\exp\left[-\frac{\nu^2}{\tau^2}\frac{\zeta'^{(1+\nu)/\nu}}{(\nu+1)^2}\right]\right\}\frac{\left(\frac{2\nu}{1+\nu}\right)^{1/(1+\nu)}\zeta'^{1/\nu}}{(2\tau)^{1+1/(1+\nu)}}d\zeta'.$$

3. Определение ϑ_2 и ϑ_2^*. Решения типа источника и типа диполя уравнения $L(y)=0$ имеют вид:

$$y_1=\left(\frac{\nu}{1+\nu}\right)^{(\nu-1)/(\nu+1)}\frac{1}{2\Gamma\left(\frac{\nu}{1+\nu}\right)}\frac{1}{\tau^{\nu/(1+\nu)}}\exp\left[-\left(\frac{\nu}{1+\nu}\right)^2\frac{\zeta^{1+1/\nu}}{\tau}\right]$$

и

$$y_2=\left(\frac{\nu}{1+\nu}\right)^{2/(\nu+1)}\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{1+\nu}\right)}\frac{\zeta^{1/\nu}}{\tau^{1+\nu/(1+\nu)}}\exp\left[-\left(\frac{\nu}{1+\nu}\right)^2\frac{\zeta^{1+1/\nu}}{\tau}\right],$$

соответственно**. Первое из них было использовано при построении решения для ϑ_1. Если бы была известна температура $\vartheta_2=\psi(\tau)$ на границе (при $\zeta\to 0$), то, воспользовавшись выражением y_2, можно было бы написать решение для $\vartheta_2(\tau,\zeta)$ в виде:

$$\vartheta_2(\tau,\zeta)=\frac{\left(\frac{\nu}{1+\nu}\right)^{2/(1+\nu)}\zeta^{1/\nu}}{\Gamma\left(\frac{1}{1+\nu}\right)}\int_0^\tau\frac{\psi(\tau')}{(\tau-\tau')^{1+1/(1+\nu)}}\left\{\exp\left[-\left(\frac{\nu}{1+\nu}\right)^2\frac{\zeta^{1+1/\nu}}{\tau-\tau'}\right]\right\}d\tau'.$$

В силу условия $\vartheta_0(\tau,0)=\vartheta_2^*(\tau,0)$ решение для ϑ_2^* имеет вид:

$$\vartheta_2^*(\tau,\xi)=\frac{\xi}{2\sqrt{\pi}}\int_0^\tau\frac{\psi(\tau')}{(\tau-\tau')^{3/2}}\left\{\exp\left[-\frac{\xi^2}{4(\tau-\tau')}\right]\right\}d\tau'.$$

---

* Это решение может быть получено либо при помощи операционного исчисления, либо по методу, предложенному Г. А. Гринбергом ([1]) и использованному Д. Л. Лайхтманом ([2]) в задаче о трансформации воздушной массы.

** Решения y_1 и y_2 можно получить либо методом Фурье, либо так, как это сделано в ([3]).

Далее находим:

$$\zeta^{1-1/\nu}\frac{\partial\vartheta_2}{\partial\zeta}\bigg|_{\zeta\to 0} = -\left(\frac{\nu}{1+\nu}\right)^{(1-\nu)/(1+\nu)}\frac{1}{\Gamma(1/(1+\nu))}\frac{d}{d\tau}\int_0^\tau\frac{\psi(\tau')\,d\tau'}{(\tau-\tau')^{1/1+\nu}},$$

$$\frac{\partial\vartheta_2^*}{\partial\xi}\bigg|_{\xi\to 0} = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{d\tau}\int_0^\tau\frac{\psi(\tau')\,d\tau'}{(\tau-\tau')^{1/2}}.$$

Подставляя это в условие баланса, получим для $\psi(\tau)$ уравнение:

$$\left(\frac{\nu}{1+\nu}\right)^{(1-\nu)/(1+\nu)}\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{1+\nu}\right)}\frac{d}{d\tau}\int_0^\tau\frac{\psi(\tau')\,d\tau'}{(\tau-\tau')^{1/(1+\nu)}}+\varkappa\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{d\tau}\int_0^\tau\frac{\psi(\tau')\,d\tau'}{(\tau-\tau')^{1/2}}+\psi(\tau)=f_2(\tau).$$

Решение его находится методами операционного исчисления:

$$\psi(\tau)=\frac{d}{d\tau}\int_0^\tau f_2(\tau')\,K(\tau-\tau')\,d\tau'.$$

Здесь функция $K(\tau)$ имеет вид:

$$K(\tau)=1-\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\frac{x^{-1}\left(\varkappa\sqrt{x}+\beta x^{1/(1+\nu)}\sin\varepsilon\right)e^{-\tau x}\,dx}{\left(1+2\beta x^{1/(1+\nu)}\cos\varepsilon+2\beta\varkappa x^{1/(1+\nu)+1/2}\sin\varepsilon+\beta^2x^{2/(1+\nu)}+\varkappa^2x\right)},$$

где $\beta=\frac{1}{\nu}\left(\frac{\nu}{1+\nu}\right)^{2/(1+\nu)}\frac{\Gamma\left(1-\frac{1}{1+\nu}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{1+\nu}\right)}, \quad \varepsilon=\frac{\pi}{1+\nu}.$

4. Физический смысл $K(\tau)$ очевиден: это изменение температуры на границе раздела под действием постоянного (равного единице, $f_2=1$) притока тепла к этой поверхности. При малых значениях τ $(\tau\ll 1)$ $K(\tau)$ можно представить в виде ряда:

$$K(\tau)=\frac{1}{\varkappa}\left\{\frac{2\sqrt{\tau}}{\sqrt{\pi}}-\frac{\beta}{\varkappa}\frac{\tau^{\nu/(1+\nu)}}{\Gamma\left(1+\frac{1}{1+\nu}\right)}-\frac{\tau}{\varkappa}+\frac{\beta^2}{\varkappa^2}\frac{\tau^{(3\nu-1)/2(\nu+1)}}{\Gamma\left(1+\frac{3\nu-1}{2(\nu+1)}\right)}+\right.$$

$$+\frac{2\beta}{\varkappa^2}\frac{\tau^{(3\nu+1)/2(\nu+1)}}{\Gamma\left(1+\frac{3\nu+1}{2(\nu+1)}\right)}+\frac{2}{3\sqrt{\pi}}\frac{\tau^{3/2}}{\varkappa^2}-\frac{\beta^3}{\varkappa^3}\frac{\tau^{(2\nu-1)/(\nu+1)}}{\Gamma\left(1+\frac{2\nu-1}{\nu+1}\right)}-$$

$$\left.-\frac{3\beta^2}{\varkappa^3}\frac{\tau^{2\nu/(\nu+1)}}{\Gamma\left(1+\frac{2\nu}{\nu+1}\right)}-\frac{3\beta}{\varkappa^3}\frac{\tau^{(2\nu+1)/(\nu+1)}}{\Gamma\left(1+\frac{2\nu+1}{\nu+1}\right)}-\frac{\tau^2}{2\varkappa^3}+O\left(\tau^{(5\nu-3)/2(\nu+1)}\right)\right\},$$

или в размерных величинах (сохраняя первые три члена):

$$K(t)=Q\left\{\frac{2\sqrt{k^*}}{\sqrt{\pi}\lambda^*}\sqrt{t}-\frac{\beta z_0t^{\nu/(1+\nu)}}{\Gamma\left(1+\frac{\nu}{1+\nu}\right)}\frac{k^*\lambda_0}{\lambda^*k_0}\left(\frac{k_0}{z_0^2}\right)^{\nu/(1+\nu)}-\frac{\mu k^*t}{\lambda^{*2}}+\ldots\right\}.$$

При $\tau\gg 1$ асимптотическое разложение $K(\tau)$ есть

$$K(\tau)\sim 1-\frac{\beta\tau^{-1/(1+\nu)}}{\Gamma\left(1-\frac{1}{1+\nu}\right)}-\frac{\varkappa\tau^{-1/2}}{\sqrt{\pi}}+\frac{\beta^2\tau^{-2/(1+\nu)}}{\Gamma\left(1-\frac{2}{1+\nu}\right)}+$$

$$+2\beta\varkappa\frac{\tau^{-(\nu+3)/2(\nu+1)}}{\Gamma\left(1-\frac{\nu+3}{2+2\nu}\right)}-\beta^3\frac{\tau^{-3/(1+\nu)}}{\Gamma\left(1-\frac{3}{1+\nu}\right)}-3\beta^2\varkappa\frac{\tau^{-(\nu+5)/(2+2\nu)}}{\Gamma\left(1-\frac{\nu+5}{2+2\nu}\right)}+$$

$$+\frac{3\beta\varkappa^2\tau^{-(\nu+2)/(\nu+1)}}{(\nu+1)\Gamma\left(\frac{\nu}{\nu+1}\right)}+\frac{\varkappa^3\tau^{-3/2}}{2\sqrt{\pi}}+O\left(\tau^{-4/(1+\nu)}\right)$$

(члены с целыми отрицательными степенями τ выпадают). Или:

$$K(t) \sim \frac{Q}{\mu}\left\{1 - \frac{\beta}{\Gamma\left(1 - \frac{1}{1+\nu}\right)} \frac{\lambda_0}{\mu z_0} \left(\frac{z_0^2}{k_0}\right)^{1/(1+\nu)} t^{-1/(1+\nu)} - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\lambda^*}{\mu \sqrt{k^*}} t^{-1/2} + \ldots\right\}.$$

Из этих разложений видно, что при малых значениях t наибольшую роль в изменении температуры играет поток тепла в почву, затем турбулентный поток тепла в воздух, и только в третьем члене разложения сказывается длинноволновое излучение с поверхности почвы. С ростом t роль излучения возрастает, и в пределе при $t \to \infty$ температура поверхности раздела стремится к предельному значению, равному Q/μ. Однако скорость стремления температуры к предельному значению существенно зависит от теплофизических характеристик

Рис. 1

почвы и воздуха, а также от шероховатости *. Эти выводы подтверждаются эмпирически. Ночью участки сухой почвы вначале остывают гораздо быстрее влажных участков, но по истечении достаточно большого промежутка времени температуры тех и других участков выравниваются. Излучение с поверхности является регулятором температуры в полярных областях, чем и объясняется там сравнительно небольшая разность температур между зимой и летом.

5. В различных задачах параметр $\varkappa$ меняется в широких пределах. Чтобы нагляднее представить зависимость решения от параметра $\varkappa$, на рис. 1 показана функция $K(\tau, \varkappa)$ в различных масштабах (при вычислениях положено $\nu = 7$).

Приведем пример расчета ночного охлаждения почвы. Зная теплофизические характеристики и начальную температуру поверхности почвы, мы можем определить, через сколько времени ее температура опустится до 0°. Примем $z_0 = 10^{-1}$ см, $\lambda_0 = 5 \cdot 10$ кал/см·сек·град, $\lambda^*/\sqrt{k^*} = 0{,}01$ кал/см^2·сек$^{1/2}$·град для песка и $\lambda^*/\sqrt{k^*} = 0{,}04$ кал/см^2·сек$^{1/2}$·град для влажной почвы с небольшим растительным покровом $\left(\text{так что } \frac{\varkappa_{\text{песка}}}{\varkappa_{\text{влажной почвы}}} = 0{,}25\right)$. Пусть, далее, $\overline{T} = \overline{T^*} = 10°$, $\Phi = \Phi^* = 0$, $F = -2{,}5 \cdot 10^{-3}$ кал/см^2·сек. Тогда температура поверхности почвы достигнет 0° через 45 мин. для песчаного участка и через 9 час. для влажного участка.

6. Замечание. Оператор $L_1 \equiv x^{1/\nu} \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial x} x^{1-1/\nu} \frac{\partial}{\partial x}$ подстановкой $\zeta = \left(\frac{\nu}{1+\nu}\right)^{1+\nu/(2+\nu)} x^{1+1/\nu}$ переводится в L с заменой ν на $\nu + 1$.

Поступило
5 VI 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. А. Гринберг, Изв. АН СССР, сер. физ., 10, № 2, 141 (1946). [2] Д. Л. Лайхтман, Метеорология и гидрология, № 1, 17 (1947). [3] Г. И. Баренблатт, Прикладн. матем. и мех., 16, 679 (1952).

* Заметим, что если не учитывать излучения с поверхности почвы ($\mu = 0$), то при $F(t) = \text{const}$ температура поверхности неограниченно растет (или убывает) со временем, так что решение потеряет физический смысл.