

А. В. МАЛЫШЕВ

**АСИМПТОТИЧЕСКИЙ ЗАКОН ДЛЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ЧИСЕЛ  
НЕКОТОРЫМИ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ ТЕРНАРНЫМИ  
КВАДРАТИЧНЫМИ ФОРМАМИ**

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 5 XI 1953)

Рассматривается вопрос о представлении целых чисел положительными тернарными целочисленными квадратичными формами. Подобный вопрос для положительных форм с четырьмя и более переменными был полностью разрешен при помощи аналитических методов <sup>(1)</sup>. Эти методы не распространяются на тернарные формы. При помощи арифметики кватернионов была доказана представимость больших чисел, удовлетворяющих некоторым необходимым условиям, положительными тернарными квадратичными формами довольно общего вида <sup>(2)</sup>.

В предлагаемой заметке дается асимптотический закон для количества представлений целых чисел каждой положительной тернарной квадратичной формой некоторого рода  $\mathfrak{G}$ . При доказательстве применяется арифметика кватернионов. Аналогичный метод, но с использованием арифметики обобщенных кватернионов — эрмитионов (см. <sup>(3)</sup>) позволяет распространить полученные результаты на другие роды.

**Теорема.** Пусть  $f(x, y, z)$  — положительная целочисленная собственнo примитивная тернарная форма нечетных инвариантов  $[r, 1]$ , принадлежащая роду  $\mathfrak{G}$  с характеристиками:

$$\left(\frac{f}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}} \text{ для всех простых } p \setminus r.$$

Пусть  $m$  — целое число, простое с  $r$ . Обозначим через  $t(f, m)$  количество примитивных представлений числа  $m$  формой  $f$ . Тогда при  $m \rightarrow \infty$  \*

$$t(f, m) \sim \begin{cases} \frac{24}{r \left(1 + \frac{1}{p_1}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{p_k}\right)} h(-m), & \text{если } m \equiv 1, 2 \pmod{4}, \\ \frac{16}{r \left(1 + \frac{1}{p_1}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{p_k}\right)} h(-m), & \text{если } m \equiv 3 \pmod{8}, \end{cases} \quad (1)$$

$$t(f, m) = 0, \quad \text{если } m \equiv 0 \pmod{4}; \equiv 7 \pmod{8},$$

\* Для форм рода  $\mathfrak{G}$  условия  $m \equiv 1, 2 \pmod{4}$ ,  $m \equiv 3 \pmod{8}$  равносильны примитивной разрешимости сравнения

$$m \equiv f(x, y, z) \pmod{8r}.$$

где  $h(-m)$  — количество классов положительных собственно примитивных бинарных квадратичных форм определителя  $m$ ;  $p_1, \dots, p_h$  — все простые делители числа  $r$ .

Доказательство теоремы основывается на следующей лемме.

Лемма. Пусть даны нечетное число  $r$ , число  $m$ , простое с  $r$ , и число  $l$  так, что

$$l^2 + m \equiv 0 \pmod{r}. \quad (2)$$

Пусть  $R$  — целый примитивный кватернион нормы  $r$ . Обозначим через  $t(R, m)$  количество целых примитивных векторов  $L$  нормы  $m$ , для которых кватернион  $l + L$  делится слева на  $R^*$ . Тогда при  $m \rightarrow \infty$

$$t(R, m) \sim \frac{t(m)}{\sigma'_r}, \quad (3)$$

где  $t(m)$  — количество примитивных векторов  $L$  нормы  $m$ , а  $\sigma'_r$  — количество примитивных не ассоциированных справа кватернионов нормы  $r$ .

Доказательство. 1°. Пусть  $R^{(1)}, \dots, R^{(\sigma'_r)}$  — совокупность всех целых примитивных не ассоциированных справа кватернионов нормы  $r$ . Если (3) не имеет места, то, принимая во внимание равенство

$$t(R^{(1)}, m) + t(R^{(2)}, m) + \dots + t(R^{(\sigma'_r)}, m) = t(m), \quad (4)$$

мы будем иметь для некоторого  $R$  бесконечную возрастающую последовательность  $m$ , для которых

$$t(R, m) < (1 - \lambda) \frac{t(m)}{\sigma'_r}, \quad (5)$$

где  $\lambda > 0$  — вещественное число, не зависящее от  $m$ .

2°. Пусть  $\rho > 0$  — некоторое вещественное число, не зависящее от  $m$ ; мы выберем его в дальнейшем. Рассмотрим целое число  $s = [(1/2 + \rho) \log_r m]$  и подберем  $l$  так, чтобы:

$$l^2 + m \equiv 0 \pmod{r^s}; \quad \text{о. н. д.} \left( \frac{l^2 + m}{r^s}, r \right) = 1; \quad |l| < r^{s+1}. \quad (6)$$

По основной теореме арифметики кватернионов можно записать

$$l + L_\alpha = B_\alpha V_\alpha, \quad B_\alpha = R_{\alpha 1} \dots R_{\alpha s} \quad (\alpha = 1, \dots, t(m)), \quad (7)$$

где  $R_{\alpha\beta}$  — не ассоциированные справа кватернионы нормы  $r$ , выбранные в 1°.

3°. Докажем, что при условии (5) из  $t(m)$  равенств (7) можно выбрать  $t_1$  равенств

$$t_1 > \frac{\lambda/2}{1 - \lambda/2} t(m) \quad (8)$$

таких, что для каждого  $\alpha$  будет

$$\leq \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) \frac{s}{\sigma'_r} \quad (9)$$

индексов  $\beta$  с условием  $R_{\alpha\beta} = R$ .

\* Легко показать, что  $t(R, m)$  не зависит от выбора числа  $l$ , удовлетворяющего условию (2).

а) Для этого покажем, во-первых, что в каждом столбце матрицы

$$\begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & \dots & R_{1s} \\ R_{21} & R_{22} & \dots & R_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{t(m)1} & R_{t(m)2} & \dots & R_{t(m)s} \end{pmatrix} \quad (10)$$

имеется одинаковое количество кватернионов  $R$ . Рассмотрим  $t(m)$  равенств

$$l + L'_\alpha = R_{\alpha 2} \dots R_{\alpha s} R'_{\alpha 1} V'_\alpha, \quad L'_\alpha = R_{\alpha 1}^{-1} L_\alpha R_{\alpha 1}, \quad R'_{\alpha 1} V'_\alpha = V_\alpha R_{\alpha 1}.$$

Легко доказать, что  $L'_\alpha$  суть различные целые примитивные векторы нормы  $m$ . Их число равно  $t(m)$ , так что это те же равенства (7), но в другом порядке. Таким образом, все столбцы матрицы (10) суть перестановки первого, и количество  $R$  в каждом столбце одинаково.

б) Теперь докажем оценки (8), (9). Оценивая количество кватернионов  $R$  в матрице (10) по строкам и по столбцам и сравнивая результаты, получим:

$$\left\{ \left( 1 - \frac{\lambda}{2} \right) \frac{s}{\sigma_r} \right\} (t(m) - t_1) < \left\{ (1 - \lambda) \frac{t(m)}{\sigma_r} \right\} s,$$

откуда для  $t_1$  получается оценка (8).

4°. Известно (см. (4), гл. 1, § 4), что количество  $w$  различных  $B_\alpha$  в равенствах, выбранных в 3°:

$$w > \kappa_\epsilon m^{1/2 - \epsilon}, \quad (11)$$

где  $\epsilon > 0$  — произвольное положительное число,  $\kappa_\epsilon > 0$  — постоянная, зависящая от  $\epsilon$ , а также от  $r$  и  $\lambda$  (но не зависящая от  $m$ ).

5°. Докажем, наоборот, что при условии (9)

$$w < \kappa m^{1/2 - \tau}, \quad (12)$$

где  $\kappa, \tau > 0$  не зависят от  $m$ . Действительно,  $w \leq w_1$ , где  $w_1$  — количество всех различных примитивных кватернионов  $B$  нормы  $r^s$ , удовлетворяющих условию (9). Имеем:

$$w_1 = \sum_{i=0}^{\left[ \left( 1 - \frac{\lambda}{2} \right) \frac{s}{\sigma_r} \right]} w^{(i)}, \quad (13)$$

где  $w^{(i)}$  есть количество различных  $B$ , которые в своем разложении содержат ровно  $i$  кватернионов  $R$ .

Оценим  $w^{(i)}$ , где  $0 \leq i \leq \left( 1 - \frac{\lambda}{2} \right) \frac{s}{\sigma_r}$ , так что  $i = (1 - \mu) \frac{s}{\sigma_r}$ ,

$\frac{\lambda}{2} \leq \mu \leq 1$ . Сравнивая  $w^{(i)}$  с  $w^{\left( \left[ \frac{s}{\sigma_r} \right] \right)}$ , замечаем, что

$$w^{(i)} \leq 4 \left( \left[ \frac{s}{\sigma_r} \right] - i \right) r^{\left[ \frac{s}{\sigma_r} \right] - i} \frac{\left[ \frac{s}{\sigma_r} \right]! \left( s - \left[ \frac{s}{\sigma_r} \right] \right)!}{i! (s - i)!} w^{\left( \left[ \frac{s}{\sigma_r} \right] \right)}. \quad (14)$$

Оценим каждый из сомножителей. Имеем:

$$w \left( \left[ \frac{s}{\sigma_r} \right] \right) < \sigma_r^s = \left( 1 + \frac{1}{p_1} \right) \dots \left( 1 + \frac{1}{p_k} \right) r^s < \kappa m^{1/2+\rho}. \quad (15a)$$

Далее,

$$4 \left( \left[ \frac{s}{\sigma_r} \right] - i \right) r^{\left[ \frac{s}{\sigma_r} \right] - i} < \kappa_\varepsilon m^{\frac{\mu(1/2+\rho)+\varepsilon}{\sigma_r}}. \quad (15б)$$

Наконец, применяя формулу Стирлинга (ср. (5)):

$$\frac{\left[ \frac{s}{\sigma_r} \right]! \left( s - \left[ \frac{s}{\sigma_r} \right] \right)!}{i! (s-i)!} < < \kappa_\varepsilon m^{(1/2+\rho) \left\{ \left( 1 - \frac{1}{\sigma_r} \right) \log_r (\sigma_r' - 1) - \frac{1-\mu}{\sigma_r} \log_r (1-\mu) - \left( 1 - \frac{1-\mu}{\sigma_r} \right) \log_r (\sigma_r' - 1 + \mu) \right\} + \varepsilon} \quad (15в)$$

Объединяя (15a), (15б), (15в), получим

$$w^{(i)} < \kappa_\varepsilon m^{(1/2+\rho) \left( 1 - \frac{z}{\sigma_r} \right) + \varepsilon}, \quad (16)$$

где

$$z = -\mu + (1-\mu) \log_r (1-\mu) + (\sigma_r' - 1 + \mu) \log_r (\sigma_r' - 1 + \mu) - (\sigma_r' - 1) \log_r (\sigma_r' - 1).$$

Вычисляя, получим  $z|_{\mu=0} = 0$ ;  $\frac{dz}{d\mu} = \log_r \frac{\sigma_r' - 1 + \mu}{r - r\mu} > 0$  при  $0 < \mu < 1$ , ибо  $\sigma_r' - 1 \geq r$ . Отсюда  $z \geq z|_{\mu=\lambda/2} > 0$ , так что существует такая постоянная  $\tau_1 = \tau_1(r, \lambda)$ , что

$$w^{(i)} < \kappa_\varepsilon m^{(1/2+\rho)(1-\tau_1)+\varepsilon};$$

$$w \leq w_1 < \left[ \left( 1 - \frac{\lambda}{2} \right) \frac{s}{\sigma_r} \right] \max_i w^{(i)} < \kappa'_\varepsilon m^{(1/2+\rho)(1-\tau_1)+\varepsilon'}. \quad (17)$$

Поэтому, подбирая  $\rho = \tau_1/2$ ,  $\varepsilon' = \tau_1^2/4$  и полагая  $\tau_1^2/4 = \tau$ , получим неравенство (12).

6°. Но неравенства (11) и (12) для достаточно больших  $m$  противоречат друг другу, отсюда наша лемма.

Интерпретация равенств при помощи интегралов дает новые факты поведения  $\vartheta$ -функций; например рассматривая форму  $f(x, y, z) = x^2 + py^2 + pz^2$ , где  $p$  — простое, число формы  $4n + 1$ , мы получаем, что при  $m \rightarrow \infty$

$$\int_0^1 S(\alpha) \{S(p\alpha)\}^2 e^{-2\pi i m \alpha} d\alpha \sim c(p) h(-m), \quad (18)$$

где  $S(\alpha) = \sum_{x \leq n} e^{2\pi i \alpha x^2}$ ;  $c(p) = \frac{24}{p+1}$ , если  $m \equiv 1, 2 \pmod{4}$ ;  $c(p) = \frac{16}{p+1}$ , если  $m \equiv 3 \pmod{8}$ .

Поступило  
28 X 1953

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> В. А. Тартаковский, Изв. АН СССР, отд. физ.-мат., 111 (1929).  
<sup>2</sup> Ю. В. Линник, Изв. АН СССР, сер. матем., 4, 363 (1940). <sup>3</sup> Ю. В. Линник, Матем. сборн., 5, (47), 453 (1939). <sup>4</sup> Ю. В. Линник, А. В. Малышев, Усп. матем. наук, 8, № 5, 3 (1953). <sup>5</sup> А. В. Малышев, ДАН, 87, 175 (1952).