Доклады Академии Наук СССР
1953. Том XCIII, № 5

МАТЕМАТИКА

М. Г. КРЕЙН

ОБ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ ФИЛЬТРОВ И λ-ЗОН УСТОЙЧИВОСТИ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 9 X 1953)

1. Пусть S — бесконечная струна, простирающаяся от $x=-\infty$ до $x=\infty$, и пусть неубывающая функция $M(x)=M(x-0)$ $(-\infty<x<\infty;$ $M(0)=0)$ задает распределение масс на этой струне так, что масса любого открытого справа отрезка $[\alpha,\beta)$ $(-\infty<\alpha<\beta<\infty)$ струны равна $M(\beta)-M(\alpha)$. Если струна S совершает свободные гармонические колебания: $Y=y(x)\sin\sqrt{\lambda}t$, то при единичном натяжении струны амплитудная функция $y(x)$ будет удовлетворять уравнению:

$$y(x)=y(0)+y'(-0)\,x-\lambda\int_0^x(x-s)\,y(s)\,dM(s)\quad(-\infty<x<\infty).\tag{1}$$

Если функция $M(x)$ абсолютно непрерывна, то это уравнение эквивалентно следующему:

$$y''+\lambda\rho(x)\,y=0\quad(-\infty<x<\infty;\quad\rho=dM/dx).\tag{2}$$

Обозначим через $\varphi(x;\lambda)$ и $\psi(x;\lambda)$ решения этого уравнения, соответствующие начальным условиям: $y(0)=1$, $y'(-0)=0$ и $y(0)=0$, $y'(-0)=1$.

Нас будет интересовать случай периодической струны, т. е. струны с распределением масс, имеющим некоторый период $M(x+T)=M(x)+M(T)$ $(-\infty<x<\infty)$.

Струну S будем называть симметричной, если $M(x)=-M(-x+0)$.

Теорема 1. *Периодическая струна S симметрична в том и только том случае, когда $\varphi(T;\lambda)=\psi'(T\pm0;\lambda)$.*

Необходимость условия устанавливается тривиально; достаточность следует из наших предыдущих результатов [1, 2].

Функцию комплексного аргумента

$$A(\lambda)={}^1/_2(\varphi(T;\lambda)+\psi'(T-0;\lambda))$$

будем называть A-функцией периодической струны S.

Обозначим через $\mathfrak{A}$ класс целых функций $A(\lambda)$, обладающих следующими двумя свойствами:

1) $A(\lambda)$ разлагается в конечное или бесконечное произведение:

$$A(\lambda)=\prod(1-\lambda/a_j)\quad(0<a_1<a_2<\ldots;\ \sum(1/a_j)<\infty);\tag{3}$$

2) все корни уравнения $A^2(\lambda)-1=0$ неотрицательны.

Из (3) вытекает, что $A(-\lambda)$ в интервале $(0, \infty)$ монотонно растет от 1 до ∞. Из 1), 2) легко вытекает еще такое свойство $A(\lambda)$:

а) Если в какой-либо точке λ^* на положительной оси функция $A(\lambda)$ достигает максимума или минимума, то, соответственно, $A(\lambda^*) \geqslant 1$ или $\leqslant -1$.

Из 1), 2) вытекает также, что:

$$A^2(\lambda)-1=-h\lambda\prod(1-\lambda/\lambda_j),$$

где $h>0$ и

$$\lambda_0=0<\lambda_1\leqslant\lambda_2<\lambda_3\leqslant\lambda_4<\ldots; \quad A(\lambda_{2j-1})=A(\lambda_{2j})=(-1)^j \qquad (4)$$
$$(j=1, 2, \ldots).$$

Теорема 2. *Для того чтобы целая функция $A(\lambda)$ была Л-функцией некоторой периодической струны, необходимо и достаточно, чтобы она принадлежала классу $\mathfrak{A}$.*

Для Л-функции $A(\lambda)$ уравнения (2) еще А. М. Ляпунов установил оценку: $|A(\lambda)|\leqslant C\exp\sqrt{2M(T)|\lambda|}$ (λ — любое комплексное число), справедливую и для общего уравнения (1), и которая вместе с равенством $A(0)=1$ дает свойство 1). Им же [5] были установлены свойство 2) Л-функции $A(\lambda)$ и свойство (4) корней уравнения $A^2(\lambda)-1=0$.

Теорема 3. *Если $A(\lambda)$ является Л-функцией некоторой периодической струны, то всегда найдутся симметрические периодические струны, имеющие $A(\lambda)$ своей Л-функцией. Таких струн будет континуум, если $A(\lambda)$ — трансцендентная функция; если же $A(\lambda)$ — многочлен, то их будет ровно 2^{k-1}, где $2k$ — число простых корней уравнения $A^2(\lambda)-1=0$.*

2. Конечную или бесконечную последовательность положительных чисел $\{\gamma_j\}$ будем называть определяющей для Л-функции $A(\lambda)$, если $\gamma_j=\lambda_{2j-1}$ или λ_{2j} $(j=1, 2, \ldots)$. Таким образом, определяющая последовательность $\{\gamma_j\}$ будет конечной или бесконечной в зависимости от того, будет ли $A(\lambda)$ трансцендентной функцией или многочленом. В случае, когда $A(\lambda)$ — многочлен N-й степени, определяющая последовательность будет состоять из N чисел $(\gamma_N=\lambda_{2N})$ и различных таких последовательностей для данного $A(\lambda)$ будет равно 2^{k-1} (см. теорему 3).

Положим $\Psi(\lambda)=\prod(1-\lambda/\gamma_j)$. Тогда, если $\{\gamma_j\}$ является определяющей последовательностью для некоторой Л-функции $A(\lambda)$, то последняя найдется из равенства:

$$\frac{A(\lambda)}{\Psi(\lambda)}=1+\lambda\sum\frac{1}{\gamma_j\,|\,\Psi'(\gamma_j)\,|\,(\lambda+\gamma_j)}. \qquad (5)$$

Теорема 4. *Для того чтобы последовательность $\{\gamma_j\}$ была определяющей для некоторой Л-функции, необходимо и достаточно, чтобы $\sum\gamma_j^{-2}\,|\,\Psi'(\gamma_j)\,|^{-1}<\infty$.*

Как мы знаем [1,2], при выполнении этого условия (и только в этом случае) найдется (и притом единственная) симметрическая струна $S_{\gamma, T}$ наперед данной длины T, имеющая при единичном натяжении и неподвижных концах $x=\pm T/2$ спектр частот $\{\sqrt{\gamma_j}\}$. Продолжая ее периодически в обе стороны до бесконечности, мы получим периодическую струну, имеющую Л-функцию $A(\lambda)$, получающуюся по формуле (5).

Если последовательность $\{\gamma_j\}$ конечна и состоит всего из N членов, то струна $S_{\gamma, T}$ вырождается в нить с бусинками, причем массы m_j $(j = 1, 2, \ldots, N)$ последовательных бусинок и длины $l_0, l_1, \ldots, l_N$ последовательных отрезков, на которые они подразделяют нить, найдутся из стилтьесовского разложения:

$$\frac{1}{T}\frac{A(-\lambda)}{\Psi(-\lambda)} = l_0 + \frac{1\,|}{|m_1\lambda} + \frac{1\,|}{|\,l_1} + \ldots + \frac{1\,|}{|m_N\lambda} + \frac{1\,|}{|\,l_N}.$$

Это разложение будет обладать тем свойством, что

$$m_j = m_{N-j+1} \quad (j = 1, 2, \ldots, N); \qquad l_j = l_{N-j} \quad (j = 0, 1, \ldots, N). \tag{6}$$

3. Пусть $\rho(\lambda)$ $(\lambda > 0)$ — корень уравнения $\rho^2 - 2A(\lambda)\rho + 1 = 0$, характеризуемый при $A^2(\lambda) > 1$ условием $-1 < \rho(\lambda) < 1$, а при $A^2(\lambda) < 1$ тем, что с непрерывным возрастанием λ он непрерывно вращается по единичной окружности против часовой стрелки. Пусть $\chi(x; \lambda) = \omega(\lambda)\varphi(x; \lambda) - \psi(x; \lambda)$ — решение уравнения (1), обладающее свойством: $\chi(x + T; \lambda) = \rho(\lambda)\chi(x; \lambda)$ $(-\infty < x < \infty, \lambda > 0)$.

Разрежем периодическую струну S в точке $x = -0$ и обозначим ее правую половину через S^+. Представляя себе, что левый конец струны S^+ является колечком «нулевого» радиуса массы $M(+0)$, могущим свободно скользить по «идеально гладкой» оси Y, приложим к нему сосредоточенную пульсирующую силу $F = \cos\sqrt{\lambda}\, t$. Возникающее тогда вынужденное колебание струны S^+ будет совершаться по закону: $y = \operatorname{Re}\{\chi(x; \lambda)\exp(i\sqrt{\lambda} t)\}$.

Если $A^2(\lambda) \leqslant 1$, то амплитуда этого вынужденного колебания будет осциллирующей незатухающей функцией при $x \to \infty$ и, наоборот, она будет стремиться к нулю при $x \to \infty$, если $A^2(\lambda) > 1$.

Пусть $\mu_1 < \mu_2 < \mu_3 \ldots$ — все простые корни уравнения $A^2(\lambda) - 1 = 0$. Тогда можно будет сказать, что гармоническое возбуждение частоты $\sqrt{\lambda}$ левого конца струны S^+ будет передаваться на ее правый конец $x = \infty$ в том и только в том случае, когда λ принадлежит одному из замкнутых интервалов $[\mu_{2j}, \mu_{2j+1}]$ $(j = 0, 1, 2, \ldots; \mu_0 = 0)$. Целую функцию

$$R(\lambda) = \lambda \prod (1 - \lambda / \mu_j) \qquad (0 < \mu_1 < \mu_2 < \ldots; \quad \sum (1/\mu_j) < \infty) \tag{7}$$

будем называть фильтрующей функцией периодической струны S (или S^+).

Теорема 5. *Для того чтобы целая функция $R(\lambda)$ вида* (7) *была фильтрующей функцией некоторой периодической струны, необходимо и достаточно, чтобы уравнение*

$$A^2(\lambda) + R(\lambda) B^2(\lambda) = 1 \tag{8}$$

допускало решение (A, B), состоящее из многочленов или целых функций нулевого рода с положительными корнями.

Если уравнение (8) *имеет решения (A, B) указанного типа, то при их нормировке $A(0) = 1$, $B(0) > 0$ они располагаются в последовательность (A_n, B_n) такую, что:*

$$A_n(\lambda) + B_n(\lambda)\sqrt{-R(\lambda)} = \left(A_1(\lambda) + B_1(\lambda)\sqrt{-R(\lambda)}\right)^n \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

при этом $A_1(\lambda)$ будет Л-функцией всякой периодической струны S, фильтрующая функция которой есть $R(\lambda)$.

Если $R(\lambda)$ — функция вида (7), а

$$Q(\lambda) = \prod (1 - \lambda / \nu_j), \quad \text{где } \nu_j = \mu_{2j-1} \text{ или } \mu_{2j} \ (j = 1, 2, \ldots), \tag{9}$$

то всегда ([3]) найдется одна и только одна струна S_Q, для которой

$$\frac{\sqrt{R(-\lambda)}}{\lambda Q(-\lambda)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\psi(x; -\lambda)}{\varphi(x; -\lambda)} \quad (0 < \lambda < \infty).$$

Теорема 6. *Пусть $R(\lambda)$ — функция вида* (7), *а $Q(\lambda)$ — одна из функций, ассоциируемых с $R(\lambda)$ по правилу* (9). *Для того чтобы $R(\lambda)$ была фильтрующей функцией некоторой струны S^+, необходимо и достаточно, чтобы струна S_Q^+ была периодической. При выполнении этого условия струна S_Q^+ будет симметричной и струнами S_Q^+, отвечающими всевозможным функциям Q, будут исчерпываться все симметрические периодические струны S^+, имеющие данную фильтрующую функцию $R(\lambda)$.*

Если $R(\lambda)$ — многочлен четной степени, то струна S_Q^+ вырождается в полубесконечную нить с бесконечным числом бусинок, массы и расположение которых будут определяться из стилтьесовского разложения:

$$\sqrt{R(-\lambda)}/\lambda Q(\lambda) = l_0 + \frac{1|}{|m_1\lambda} + \frac{1|}{|l_1} + \frac{1|}{|m_2\lambda} + \ldots$$

Периодичность «струны» S_Q^+ будет теперь означать существование целого N такого, что $m_{j+N} = m_j$, $l_{j+N} = l_j$ $(j = 1, 2, \ldots)$ и $l_N = 2l_0$, при этом будут выполняться также и условия (6), за исключением одного из них $(l_N = l_0)$.

Заметим, что уравнение (8) всегда имеет целое решение $A(\lambda) = \cos\sqrt{R(\lambda)}$, $B(\lambda) = \left(\sin\sqrt{R(\lambda)}\right)/\sqrt{R(\lambda)}$, но функции этого решения не нулевого рода.

Еще Абель в знаменитом мемуаре ([6,7]) доказал, что, если $R(\lambda)$ — какой-либо многочлен четной степени без кратных корней, то для существования решения (A, B) из многочленов уравнения (8) необходимо и достаточно, чтобы $\sqrt{R(\lambda)}$ разлагался в некоторую бесконечную непрерывную периодическую дробь. Для случая многочлена $R(\lambda)$ $(R(0) = 0)$ с неотрицательными нулями критерий Абеля эквивалентен нашему варианту, оперирующему с дробями более определенной и простой структуры (стилтьесовскими).

Теоремы 5, 6 следует рассматривать как некоторое обобщение классического результата Абеля.

Поступило
22 IX 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. Г. Крейн, ДАН, 76, № 3 (1951); 82, № 5 (1952). [2] М. Г. Крейн, Прикладн. матем. и мех., 16, № 5 (1952). [3] М. Г. Крейн, ДАН, 87, № 6 (1952). [4] А. М. Ляпунов, Зап. Акад. наук, физ.-матем. отд., 8 сер., XIII, № 2 (1902). [5] А. М. Ляпунов, C. R., 128, 910 (1899). [6] N. H. Abel, Oeuvres complètes, 1, 1839. [7] Н. Г. Чеботарев, Теория алгебраических функций, 1948.