

Академик А. Н. КОЛМОГОРОВ

## О ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ ИНВАРИАНТОМ НА ТОРЕ

Рассматриваемые далее системы координат на торе  $T^2$  будут относиться к точке  $P$  пару действительных чисел  $(x, y)$ , определенных по модулю  $2\pi$ .

Под аналитичностью функции  $f(x, y)$  от координат будет пониматься ее аналитичность при всех действительных  $x$  и  $y$ . Функция от координат  $f(x, y)$ , очевидно, лишь в том случае будет однозначной функцией  $f(P)$  точки  $P$ , когда она периодична по каждому из переменных  $x$  и  $y$  с периодом  $2\pi$ . Мы будем рассматривать динамическую систему на  $T^2$ , определенную в некоторой системе координат системой уравнений

$$\frac{dx}{dt} = A(x, y), \tag{1}$$

$$\frac{dy}{dt} = B(x, y)$$

и обладающую интегральным инвариантом

$$I(g) = \iint_g U(x, y) dx dy. \tag{1'}$$

Естественно, что при этом функции  $A, B$  и  $U$  предполагаются однозначными функциями точки  $P$ . Кроме того мы предположим, что они аналитичны и удовлетворяют на всем  $T^2$  условиям

$$A^2 + B^2 > 0, \quad U > 0.$$

При этих допущениях известные общие результаты Пуанкаре, Данжуа и Кнезера (см., например, (1), гл. 2, § 2) могут быть дополнены следующим образом:

**Теорема 1.** *Существует аналитическое преобразование координат, которое приводит систему (1) к виду*

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{F(x, y)}, \tag{2}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\gamma}{F(x, y)},$$

а интегральный инвариант  $I(g)$  к виду

$$I(g) = \int\int_g F(x, y) dx dy, \quad (2')$$

где  $\gamma$  — некоторая константа.

Случай рационального  $\gamma$  приводит к замкнутым траекториям и с качественной точки зрения вполне элементарен. Если  $\gamma$  иррационально, то хорошо известно, что все траектории всюду плотны на  $T^2$  и динамическая система транзитивна (см. (1)). Введенные нами допущения об аналитичности функций  $A$ ,  $B$  и  $U$  позволяют установить, что в известном смысле «общим» случаем здесь является случай динамической системы, записывающейся в надлежащей системе координат в виде

$$\frac{du}{dt} = \lambda_1, \quad (3)$$

$$\frac{dv}{dt} = \lambda_2,$$

где  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  — константы. Именно, имеет место:

**Теорема 2.** Если существуют такие  $C > 0$  и  $h > 0$ , что при всех целых  $m$  и  $n > 0$

$$|m - n\gamma| \geq Ch^n, \quad (4)$$

то существует аналитическое преобразование координат, которое переводит систему (2) в систему (3), причем

$$\lambda_2 = \gamma\lambda_1,$$

а интегральный инвариант  $I(g)$  приобретает вид

$$I(g) = K \int\int_g du dv, \quad (3')$$

где  $K$  — константа.

Условие (4) выполняется (при надлежащем выборе  $C$  и  $h$ , зависящих от  $\gamma$ ) для всех  $\gamma$ , кроме множества лебеговской меры нуль (см., например, (2)).

Очевидно, что в случае применимости теоремы 2 динамическая система имеет дискретный спектр с собственными частотами

$$\lambda_{rs} = r\lambda_1 + s\lambda_2,$$

где  $r$  и  $s$  — целые числа, и соответствующими им собственными функциями  $\varphi_{rs}$ , которые по приведении системы к виду (3) записываются в виде

$$\varphi_{rs}(u, v) = e^{i(ru + sv)}. \quad (5)$$

В силу аналитичности преобразования координат, приводящего систему к виду (3), собственные функции являются аналитическими и в первоначальной системе координат.

Для иррациональных  $\gamma$ , не удовлетворяющих условию (4), имеется ряд других возможностей, полное обозрение которых требует перехода на точку зрения общей метрической теории динамических систем. При этом естественно допустить к рассмотрению не только не аналитические, но даже и разрывные преобразования координат, требуя только, чтобы отображение координатного тора  $(x, y)$  на координатный тор  $(u, v)$ , так же как и обратное отображение были измеримы по

Лебегу и переводили множества меры нуль в множества меры нуль (метрическая абсолютная непрерывность). Рассмотрения естественно вести с точностью до множеств меры нуль и называть, например, отображение аналитическим, данное число раз дифференцируемым или непрерывным в том случае, если оно совпадает с аналитическим, данное число раз дифференцируемым или непрерывным отображением с точностью до множества меры нуль.

Формулируемая далее теорема 3 относится именно к измеримым абсолютно непрерывным (в метрическом смысле) преобразованиям, рассматриваемым с точностью до множества меры нуль.

Для правильного ее понимания следует заметить, что два такого рода преобразования, приводящие динамическую систему с иррациональным  $\gamma$  к виду (3), могут отличаться между собой лишь линейным преобразованием

$$u' = au + bv, \quad v' = cu + dv$$

с целыми коэффициентами и детерминантом  $\pm 1$ .

Теорема 3. При надлежащем выборе иррационального  $\gamma$  и аналитической функции  $F(x, y)$  возможен каждый из следующих случаев:

- 1) система (2) приводится к виду (3) бесконечно дифференцируемым, но не аналитическим преобразованием координат;
- 2) система (2) приводится к виду (3)  $k$ -кратно дифференцируемым, но не дифференцируемым  $k+1$ -кратно преобразованием;
- 3) приведение системы (2) к виду (3) возможно лишь при помощи всюду разрывного преобразования;
- 4) приведение системы (2) к виду (3) невозможно.

Очевидно, что в случаях 1), 2) и 3) система имеет дискретный спектр с системой собственных функций вида (5), но эти функции оказываются, соответственно, не аналитическими, не дифференцируемыми  $k+1$ -кратно или всюду разрывными.

Весьма вероятно, что в случае 4) спектр неизбежно непрерывен, но пока доказана только

Теорема 4. При надлежащем выборе иррационального  $\gamma$  и аналитической функции  $F(x, y)$  спектр динамической системы непрерывен\*.

Преобразование координат, существование которого утверждается в теореме 2 и в пунктах 1), 2), 3) теоремы 3, может быть получено следующим образом:

$$u = \frac{2\pi}{a_0} \{ \tau(x, y) + R(y - \gamma x) \}, \quad v = y + \gamma(u - x),$$

где

$$\tau(x, y) = \int_0^x F(\xi, y + \gamma(\xi - x)) d\xi, \quad S(y) = \tau(2\pi, y),$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S(y) dy = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} F(x, y) dx dy,$$

а  $R(y)$  — решение функционального уравнения

$$R(y + 2\pi\gamma) - R(y) = S(y) - a_0, \quad (6)$$

\* Т. е. не существует измеримой функции  $\varphi(P)$ , не равной с точностью до множества меры нуль константе, которая вдоль траекторий меняется по закону

$$\varphi(P_t) = e^{i\lambda t} \varphi(P_0).$$

имеющее период  $2\pi$  и удовлетворяющее условию

$$\int_0^{2\pi} R(y) dy = 0.$$

Если представить  $S(y)$  в виде тригонометрического ряда

$$S(y) = a_0 + \sum_{n \neq 0} a_n e^{iny},$$

то  $R(y)$  формально пишется в виде

$$R(y) = \sum_{n \neq 0} \frac{a_n}{e^{i2\pi n \gamma} - 1} e^{iny}. \quad (7)$$

Условие (4) гарантирует сходимость ряда (7) к аналитической функции. Наличие в формуле (7) знаменателей, которые при надлежащей арифметической природе иррациональности  $\gamma$  могут быть очень малы, объясняет причины возникновения аномалий, отмеченных в теореме 3.

Если ряд

$$\sum_{n \neq 0} \left| \frac{a_n}{e^{i2\pi n \gamma} - 1} \right|^2 \quad (8)$$

сходится, то спектр дискретен и собственные функции имеют вид (5). При сделанном в самом начале допущении об аналитичности функции  $F(x, y)$  коэффициенты  $a_n$  с возрастанием  $|n|$  быстро убывают, малые же знаменатели в ряде (7) при любой иррациональности  $\gamma$  могут встречаться лишь по разреженной последовательности значений  $n$ . Поэтому в случае расходимости ряда (8) следует ожидать, что природа ряда (7) будет аналогична природе лакунарных рядов с расходящейся суммой квадратов коэффициентов, т. е. с рядом (7) нельзя будет связать естественным образом никакой измеримой функции  $R(y)$ . Поэтому вероятно, что в случае расходимости ряда (8) приведение динамической системы к виду (3) невозможно. Вероятно, в этом случае спектр неизбежно непрерывен, т. е. для рассматриваемых нами динамических систем исключен случай смешанного спектра, а дискретный спектр всегда имеет ровно две независимые частоты.

В заключение заметим, что роль «малых знаменателей», мешающих сходимости рядов, хорошо известна в небесной механике.

Поступило  
13 XI 1953

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

<sup>1</sup> В. В. Немыцкий, В. В. Степанов, Качественная теория дифференциальных уравнений, изд. 2-е, 1949. <sup>2</sup> А. Я. Хинчин, Усп. матем. наук, в. 1 (1936).